Sommario

Reti due porte, rappresentazione generale, reciprocità e simmetria

Rappresentazioni tipiche Z, Y, H, G, T, T’

Per ogni rappresentazione: eccitazione standard, schema equivalente, reciprocità e simmetria

Formule di passaggio fra rappresentazioni

Connessione di reti due porte

Rappresentazione esterna

Talvolta si usano dispositivi elettrici di cui sono note solo le caratteristiche esterne

Per tali dispositivi occorre disporre di metodi di rappresentazione circuitale, utili per determinare il comportamento del dispositivo se inserito in un circuito più ampio

Nel caso di dispositivi lineari, la rappresentazione è effettuata in un dominio trasformato (fasori o Laplace)

Problemi

Definire i metodi di rappresentazione

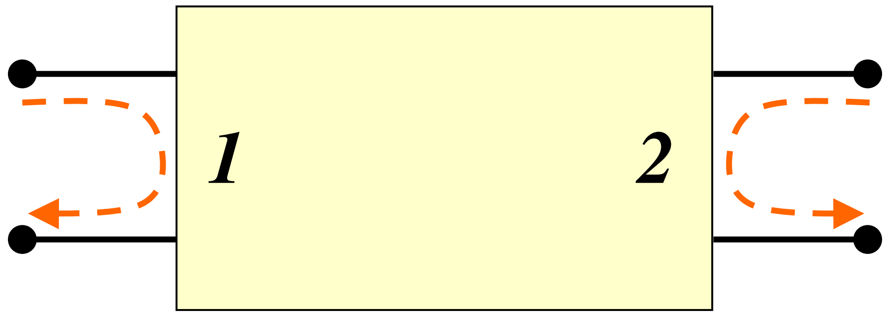
Determinare la rappresentazione noto lo schema interno

Determinare metodi di analisi per circuiti contenenti dispositivi caratterizzati esternamente (e componenti elementari)

Reti due porte

Il caso più comune di dispositivi elettrici è costituito dalle reti due porte

Porta: una coppia di morsetti tali che la corrente che entra in uno è uguale alla corrente che esce dall'altro

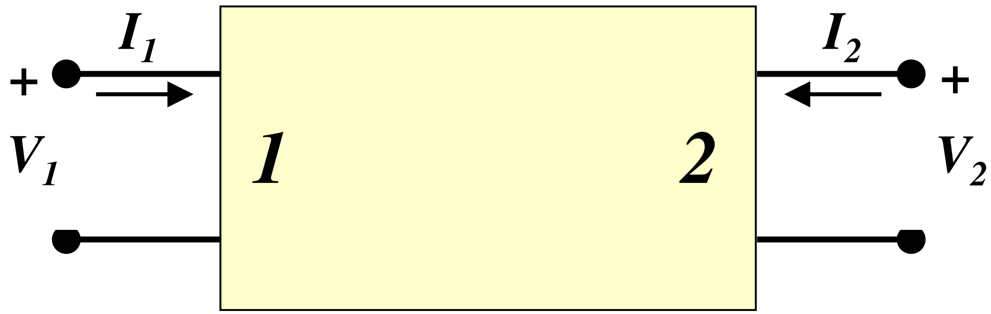


Grandezze elettriche esterne (o di porta)

Reti due porte

Il caso più comune di dispositivi elettrici è costituito dalle reti due porte

Si dimostra che una rete due porte lineare e omogenea si può rappresentare con due relazioni lineari e omogenee



$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + b_{11}I_1 + b_{12}I_2 = 0 \\ a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + b_{21}I_1 + b_{22}I_2 = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione generale

Grandezze elettriche esterne (o di porta)

Tensioni	V_1	V_2
Correnti	I_1	I_2

Notazione vettoriale

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad ; [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

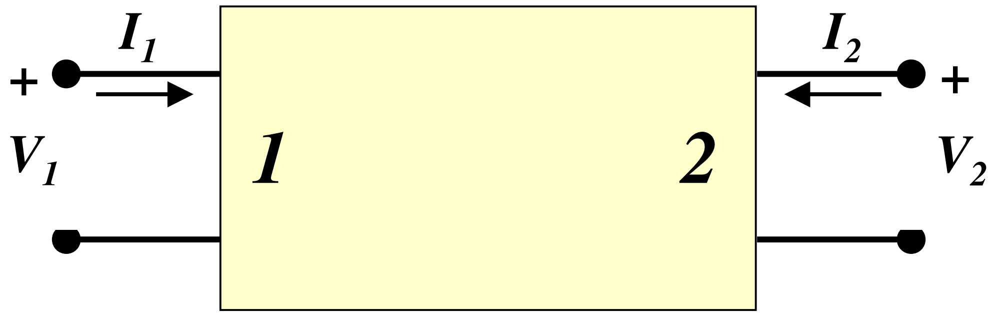
$$[A][V] + [B][I] = [0]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Reti due porte

Il caso più comune di dispositivi elettrici è costituito dalle reti due porte

Si dimostra che una rete due porte lineare e omogenea si può rappresentare con due relazioni lineari e omogenee



$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + b_{11}I_1 + b_{12}I_2 = 0 \\ a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + b_{21}I_1 + b_{22}I_2 = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione generale

Grandezze elettriche esterne (o di porta)

Tensioni	V_1	V_2
Correnti	I_1	I_2

Notazione vettoriale

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \; ; [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

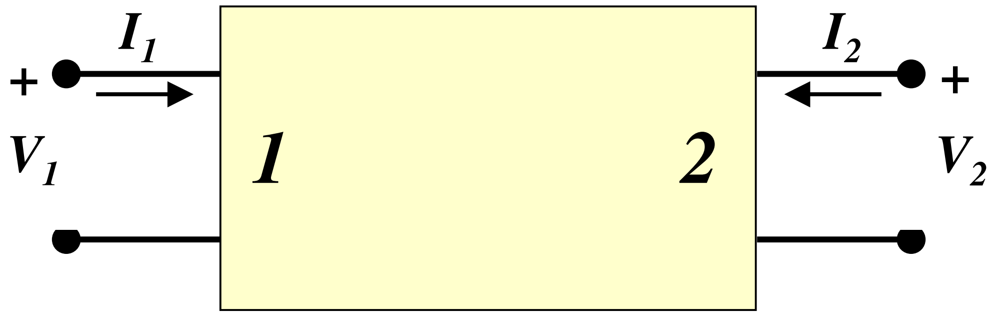
$$[A][V] + [B][I] = [0]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Reti due porte

Il caso più comune di dispositivi elettrici è costituito dalle reti due porte

Si dimostra che una rete due porte si può rappresentare con due relazioni lineari e omogenee linearmente indipendenti



$$\begin{cases} a_{11}V_1 + a_{12}V_2 + b_{11}I_1 + b_{12}I_2 = 0 \\ a_{21}V_1 + a_{22}V_2 + b_{21}I_1 + b_{22}I_2 = 0 \end{cases}$$

Rappresentazione generale

Grandezze elettriche esterne (o di porta)

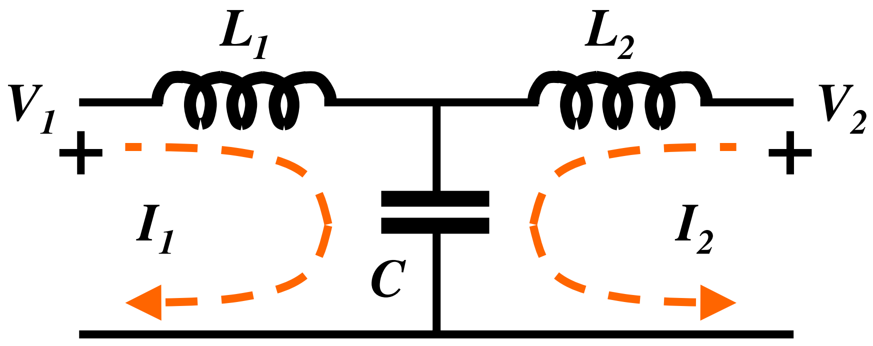
Tensioni	V_1	V_2
Correnti	I_1	I_2

La matrice dei coefficienti ha rango due

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{array}\right]$$

Esiste un minore di ordine due diverso da zero

Esempio



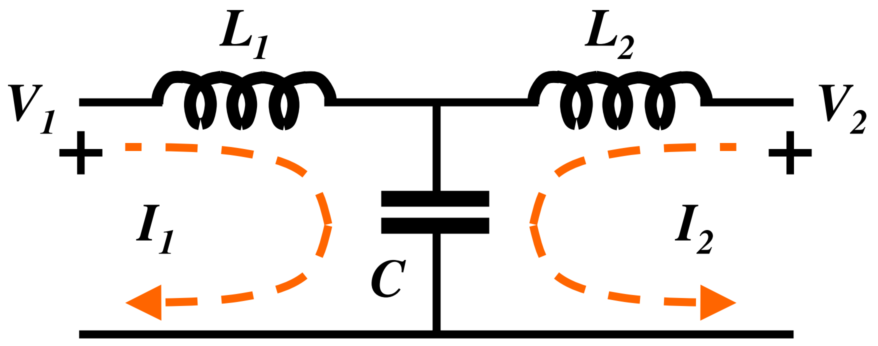
$$\begin{cases} V_1 = s\, L_1 I_1 + \dfrac{1}{s\, C}\,(I_1 + I_2) \\ V_2 = s\, L_2 I_2 + \dfrac{1}{s\, C}\,(I_1 + I_2) \end{cases}$$

- Equazioni alle maglie
- Trasformate di Laplace

$$\begin{cases} s\, C\, V_1 = s^2 L_1 C\, I_1 + (I_1 + I_2) \\ s\, C\, V_2 = s^2 L_2 C\, I_2 + (I_1 + I_2) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} sC & 0 \\ 0 & sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1 + s^2 L_1 C) & -1 \\ -1 & -(1 + s^2 L_2 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio



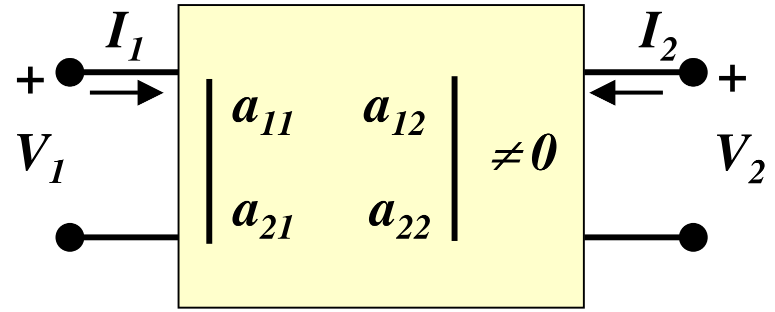
$$\begin{cases} V_1 = s\,L_1 I_1 + \dfrac{1}{s\,C}(I_1 + I_2) \\ V_2 = s\,L_2 I_2 + \dfrac{1}{s\,C}(I_1 + I_2) \end{cases}$$

- *Equazioni alle maglie*
- *Trasformate di Laplace*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s\,C & 0 \\ 0 & s\,C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1 + s^2 L_1 C) & -1 \\ -1 & -(1 + s^2 L_2 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

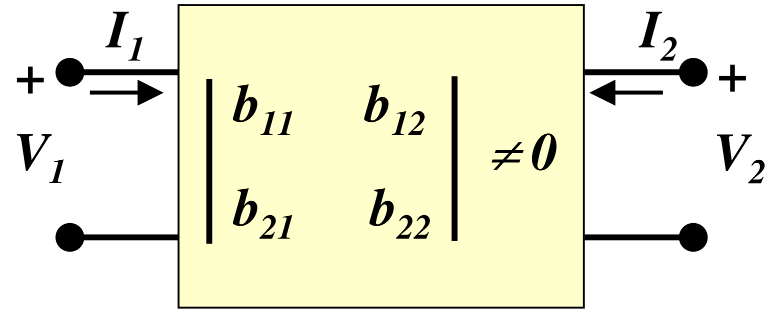
Rappresentazioni comuni



$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ *impedenze* [Z]		

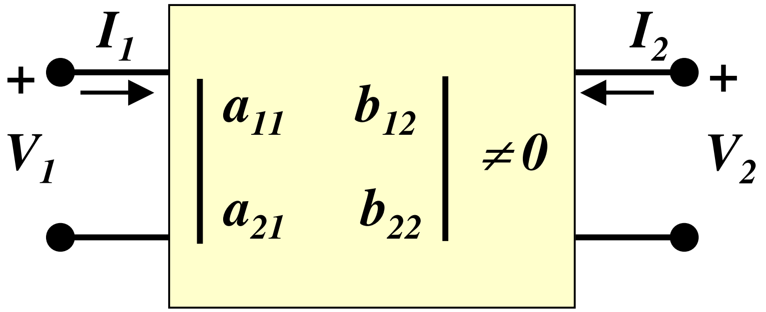
Rappresentazioni comuni



$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ ***impedenze* [Z]**	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ ***ammettenze* [Y]**	

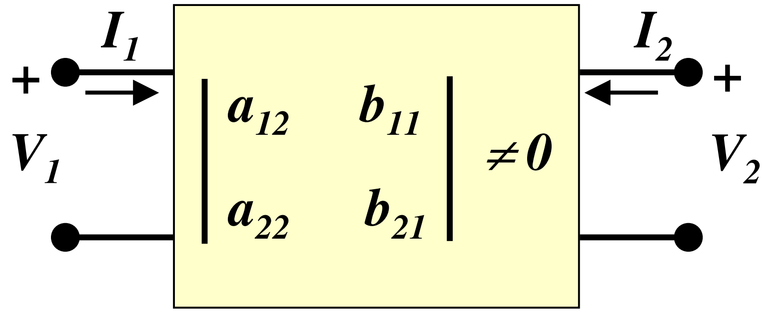
Rappresentazioni comuni



$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ *impedenze* [*Z*]	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ *ammettenze* [*Y*]	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$ *ibrida* [*H*]

Rappresentazioni comuni

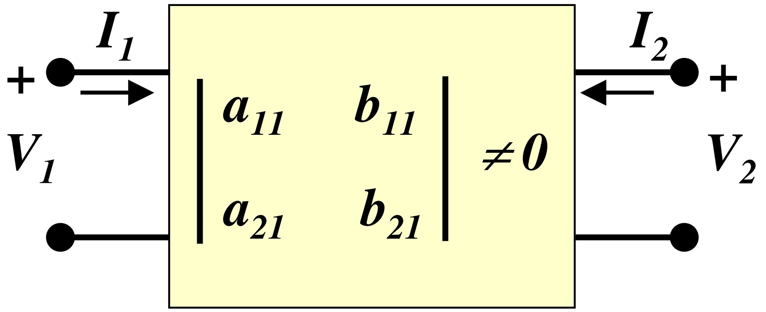


$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ ***impedenze* [Z]**	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ ***ammettenze* [Y]**	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$ ***ibrida* [H]**
		$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$ ***ibrida* [G]**

Tor Vergata

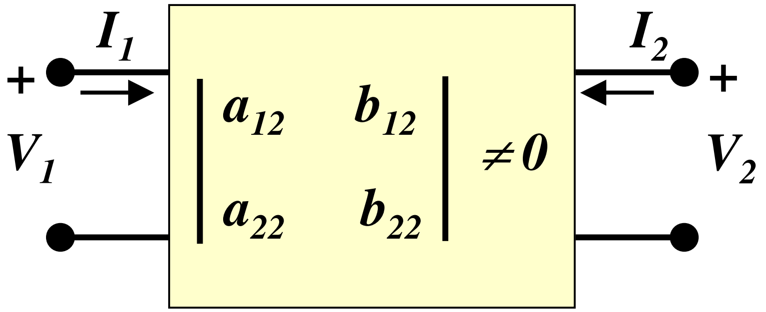
Rappresentazioni comuni



$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ *impedenze* [*Z*]	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ *ammettenze* [*Y*]	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$ *ibrida* [*H*]
	$\begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$ *trasmissione inversa* [*T*]	$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$ *ibrida* [*G*]

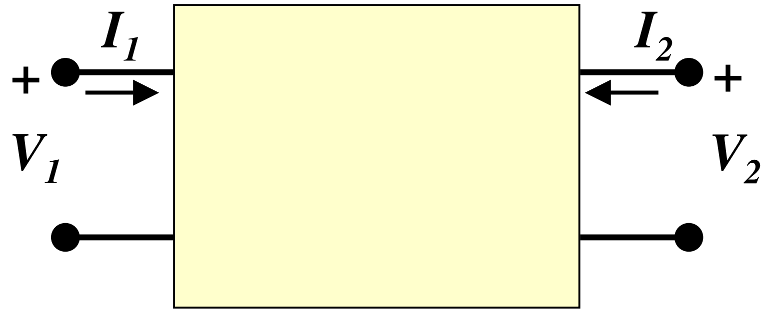
Rappresentazioni comuni



$$\begin{cases} a_{11} V_1 + a_{12} V_2 + b_{11} I_1 + b_{12} I_2 = 0 \\ a_{21} V_1 + a_{22} V_2 + b_{21} I_1 + b_{22} I_2 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ *impedenze* [*Z*]	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ *ammettenze* [*Y*]	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$ *ibrida* [*H*]
$\begin{cases} V_2 = A' V_1 + B' I_1 \\ -I_2 = C' V_1 + D' I_1 \end{cases}$ *trasmissione diretta* [*T'*]	$\begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$ *trasmissione inversa* [*T*]	$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$ *ibrida* [*G*]

Rappresentazioni comuni

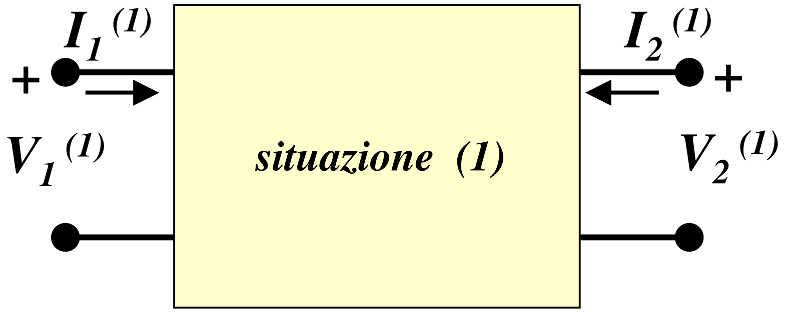


Per ogni rete esiste almeno una rappresentazione comune

Per qualche rete una o più rappresentazioni comuni possono non esistere

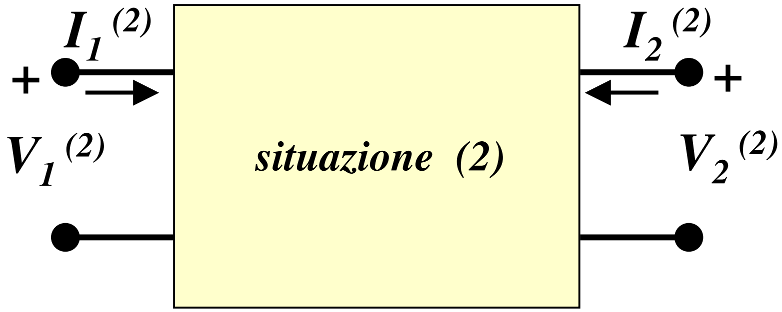
$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$ ***impedenze [Z]***	$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$ ***ammettenze [Y]***	$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$ ***ibrida [H]***
$\begin{cases} V_2 = A' V_1 + B' I_1 \\ -I_2 = C' V_1 + D' I_1 \end{cases}$ ***trasmissione diretta [T']***	$\begin{cases} V_1 = A V_2 - B I_2 \\ I_1 = C V_2 - D I_2 \end{cases}$ ***trasmissione inversa [T]***	$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$ ***ibrida [G]***

Reciprocità



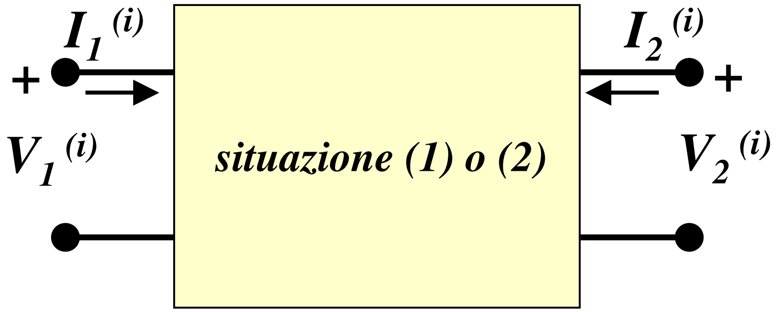
Si consideri una rete due porte in due situazioni differenti, indicate rispettivamente con gli apici (1) e (2)

Reciprocità



Si consideri una rete due porte in due situazioni differenti, indicate rispettivamente con gli apici (1) e (2)

Reciprocità



Se vale la relazione

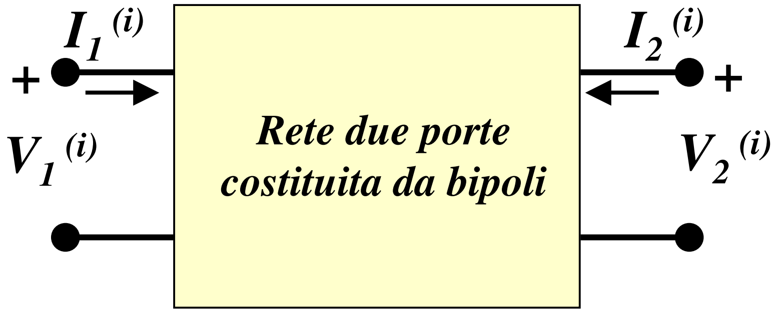
$$V_1^{(1)}\ I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\ I_2^{(2)} = $$
$$= V_1^{(2)}\ I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\ I_2^{(1)}$$

la rete è reciproca

(reciprocità di Lorentz)

Tor Vergata

Reciprocità



Se non vale la relazione

$$V_1^{(1)}\ I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\ I_2^{(2)} = \\ = V_1^{(2)}\ I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\ I_2^{(1)}$$

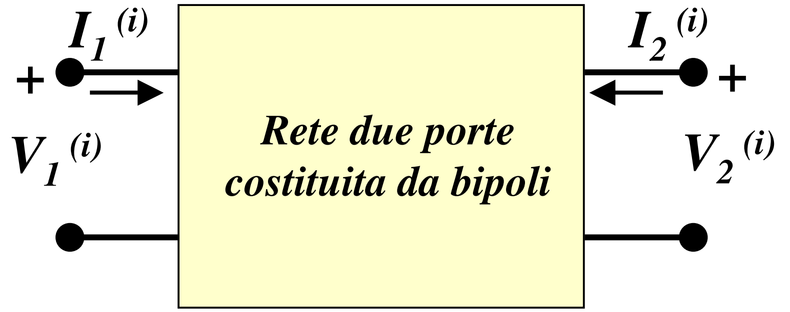
la rete è ***non reciproca***

$$\sum_R V_k^{(1)}\ I_k^{(2)} = 0$$

***Teorema di Tellegen**: date due reti (1) e (2) aventi lo stesso grafo, è uguale a zero la somma dei termini* $V_k^{(1)} I_k^{(2)}$ *, ove a somma è estesa a tutti gli R rami presenti*

Nel caso presente la somma è estesa a tutti i rami della rete, e cioè a tutti i bipoli interni alla rete, più le due porte esterne 1 e 2 .

Reciprocità



Se non vale la relazione

$$V_1^{(1)}\ I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\ I_2^{(2)} = \\ = V_1^{(2)}\ I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\ I_2^{(1)}$$

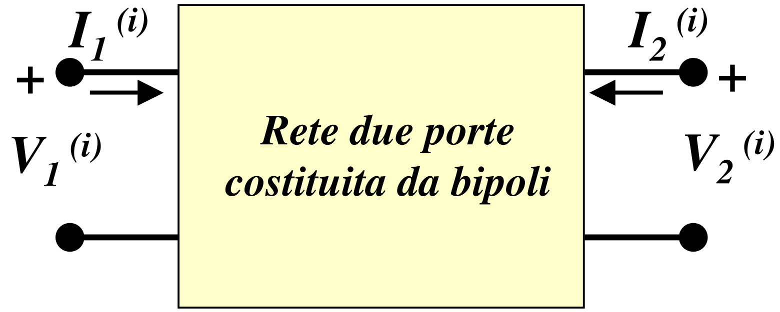
la rete è non reciproca

$$\sum_{R} V_k^{(1)}\ I_k^{(2)} = 0$$

$$\sum_{R_i} V_k^{(1)}\ I_k^{(2)} + V_1^{(1)}\ I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\ I_2^{(2)} = 0$$

Si può separare la somma di Tellegen a tutti gli R_i bipoli interni alla rete, più le due porte esterne 1 e 2 .

Reciprocità



Se non vale la relazione

$$V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = \\ = V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)}$$

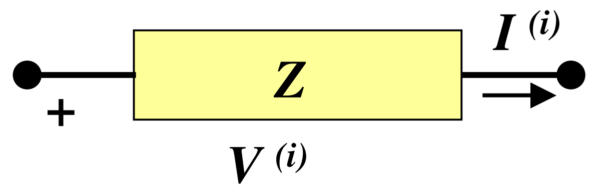
la rete è ***non reciproca***

$$\sum_R V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} = 0 \qquad \sum_R V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} = 0$$

$$\sum_{R_i} V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} + V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = 0$$

$$\sum_{R_i} V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} + V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)} = 0$$

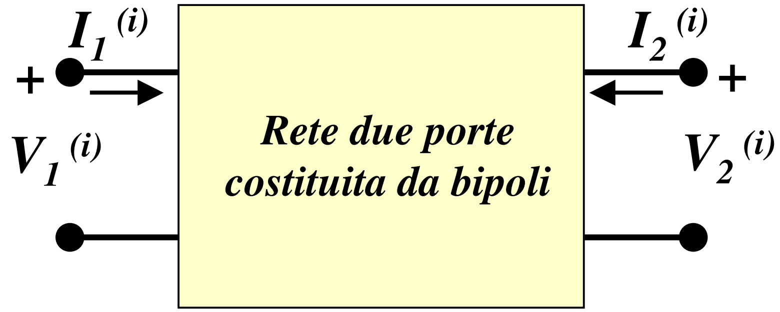
Somme sui bipoli interni	Somme sulle porte esterne



$$V^{(1)} I^{(2)} = Z\, I^{(1)} I^{(2)} = \\ = I^{(1)} Z\, I^{(2)} = V^{(2)} I^{(1)}$$

Ogni bipolo di impedenza Z è reciproco

Reciprocità



Se non vale la relazione

$$V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = $$
$$= V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)}$$

la rete è non reciproca

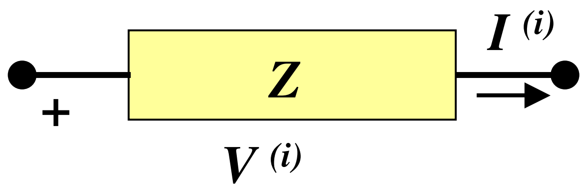
$$\sum_R V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} = 0 \qquad \sum_R V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} = 0$$

$$\sum_{R_i} V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} + V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = 0$$

$$\sum_{R_i} V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} + V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)} = 0$$

Sottraendo membro a membro

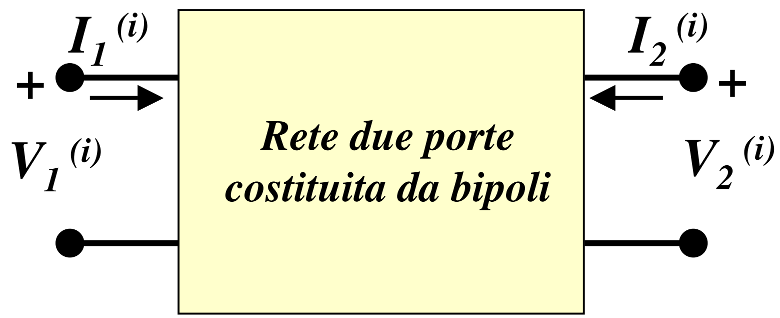
$$\sum_{R_i} V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} + V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = \sum_{R_i} V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} + V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)}$$



$$V^{(1)} I^{(2)} = Z\, I^{(1)} I^{(2)} =$$
$$= I^{(1)} Z\, I^{(2)} = V^{(2)} I^{(1)}$$

Ogni bipolo di impedenza Z è reciproco

Reciprocità



Una rete due porte costituita da bipoli è reciproca

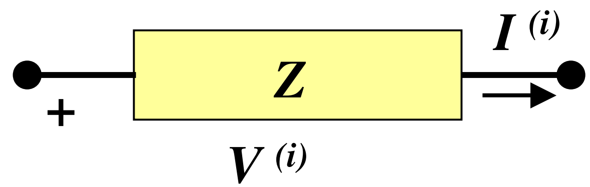
$$\sum_R V_k^{(1)}\, I_k^{(2)} = 0 \qquad \sum_R V_k^{(2)}\, I_k^{(1)} = 0$$

$$\boxed{\sum_{R_i} V_k^{(1)}\, I_k^{(2)}} + \boxed{V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)}} = 0$$

$$\boxed{\sum_{R_i} V_k^{(2)}\, I_k^{(1)}} + \boxed{V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)}} = 0$$

Essendo i bipoli reciproci, le due sommatorie sono uguali

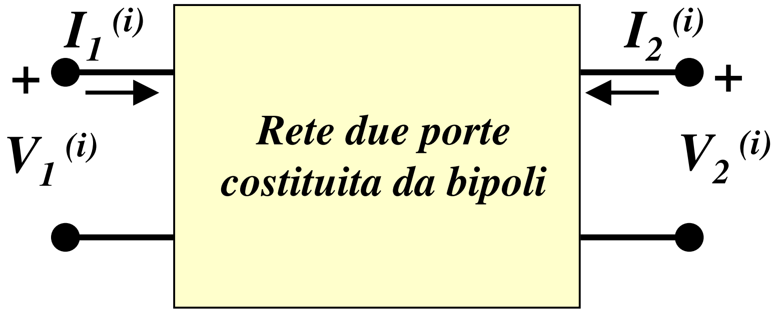
$$\cancel{\sum_{R_i} V_k^{(1)}\, I_k^{(2)}} + V_1^{(1)}\, I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\, I_2^{(2)} = \cancel{\sum_{R_i} V_k^{(2)}\, I_k^{(1)}} + V_1^{(2)}\, I_1^{(1)} + V_2^{(2)}\, I_2^{(1)}$$



$$V^{(1)} I^{(2)} = Z\, I^{(1)} I^{(2)} =$$
$$= I^{(1)} Z\, I^{(2)} = V^{(2)} I^{(1)}$$

Ogni bipolo di impedenza Z è reciproco

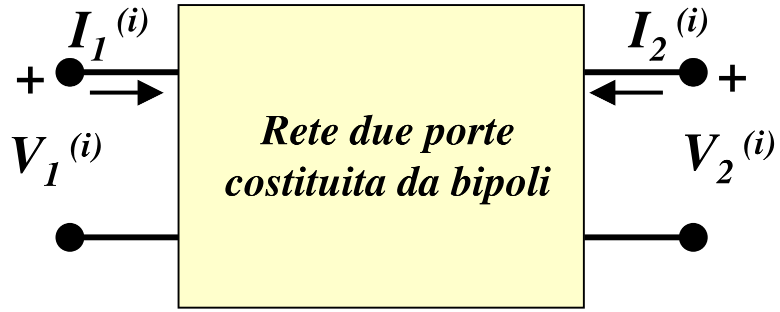
Reciprocità



Una rete due porte costituita da bipoli è reciproca

Altre proprietà

Reciprocità

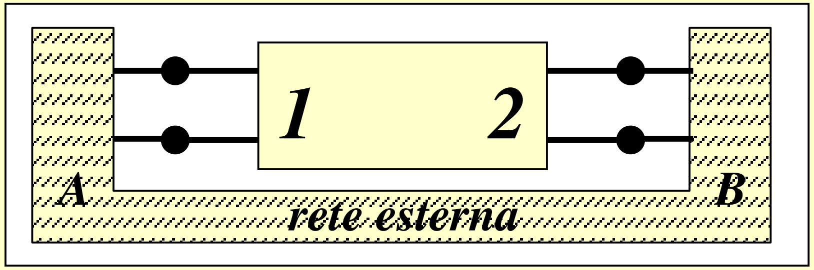


Una rete due porte costituita da bipoli è reciproca

Altre proprietà

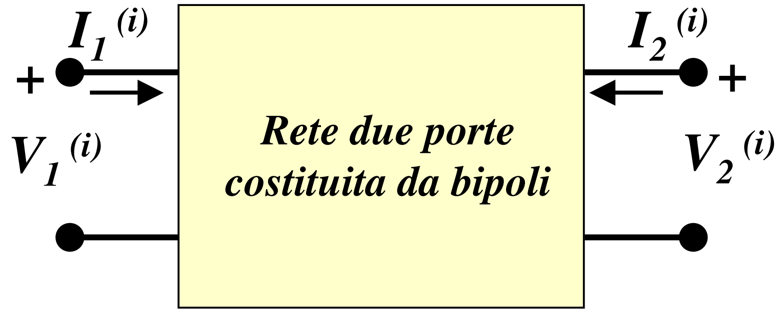
Generatori controllati e nullori sono reti due porte non reciproche

Induttori accoppiati e trasformatori ideali sono reti due porte reciproche



Il comportamento di una qualunque rete esterna non cambia rovesciando la rete due porte

Reciprocità

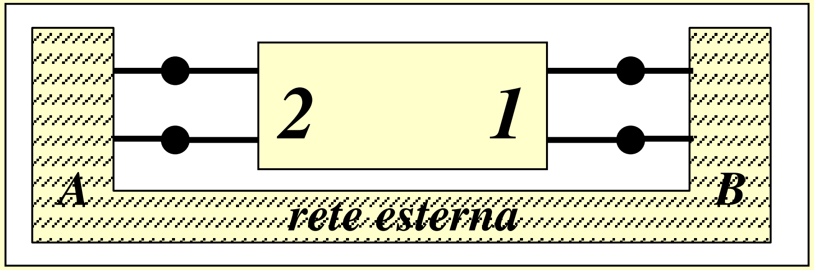


Una rete due porte costituita da bipoli è reciproca

Altre proprietà

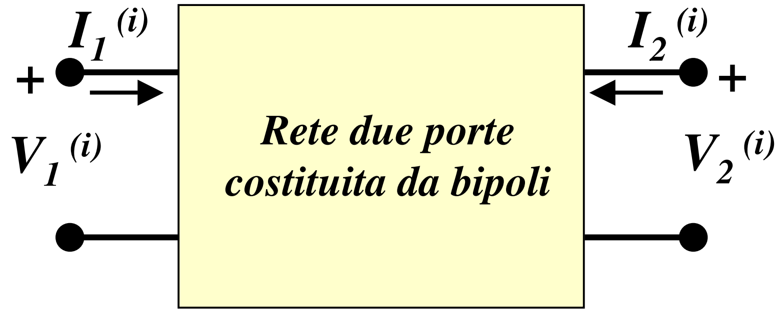
Generatori controllati e nullori sono reti due porte non reciproche

Induttori accoppiati e trasformatori ideali sono reti due porte reciproche



Il comportamento di una qualunque rete esterna non cambia rovesciando la rete due porte . La rete due porte è **simmetrica**

Reciprocità



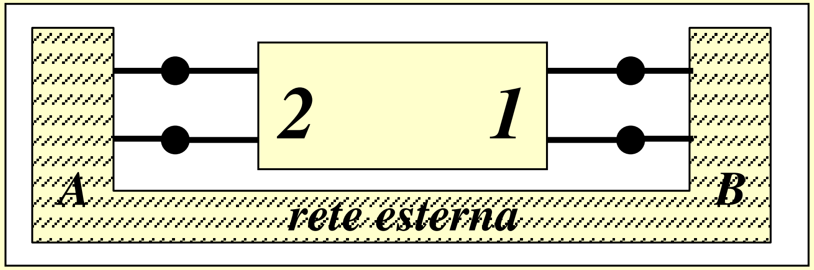
Una rete due porte costituita da bipoli è reciproca

Altre proprietà

Generatori controllati e nullori sono reti due porte non reciproche

Induttori accoppiati e trasformatori ideali sono reti due porte reciproche

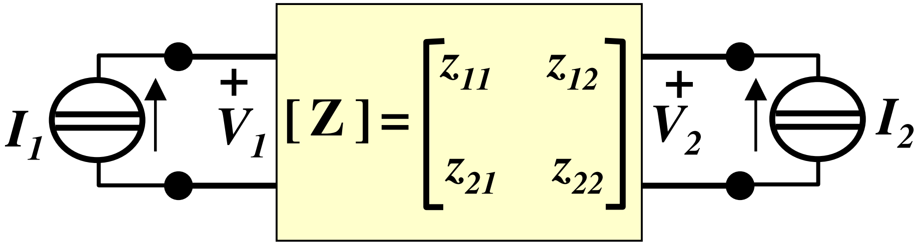
Una rete due porte simmetrica è reciproca (non è vero il viceversa)



Il comportamento di una qualunque rete esterna non cambia rovesciando la rete due porte . La rete due porte è
simmetrica

Una rete due porte costituita da bipoli e da altre rete due porte reciproche è reciproca

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

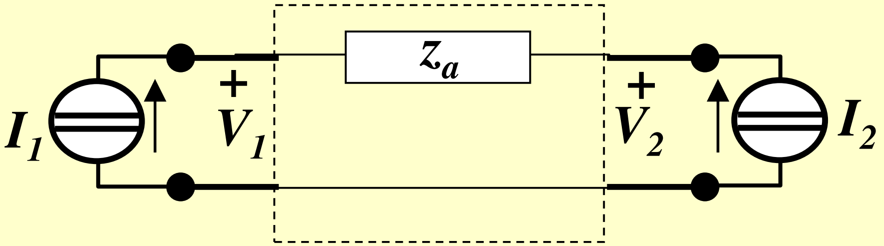
I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Non vi deve essere nessun legame fra le grandezze indipendenti

Se ciò non fosse vero,
la rappresentazione [Z] non esisterebbe per la rete considerata

Esempi

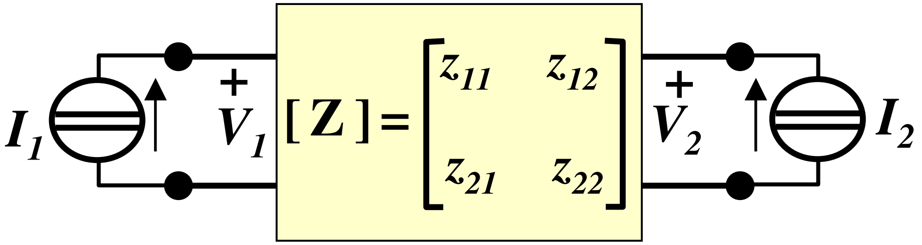


La costituzione interna della rete impone $I_1 = -I_2$

Pertanto i due generatori esterni non sono indipendenti poiché devono soddisfare la relazione imposta

La rappresentazione [Z] non esiste per la rete considerata

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

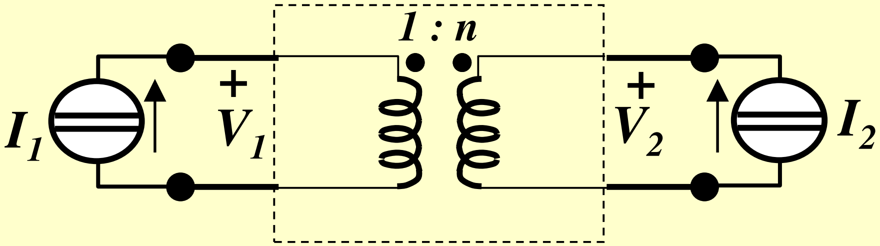
I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Non vi deve essere nessun legame fra le grandezze indipendenti

Se ciò non fosse vero,
la rappresentazione [Z] non esisterebbe per la rete considerata

Esempi

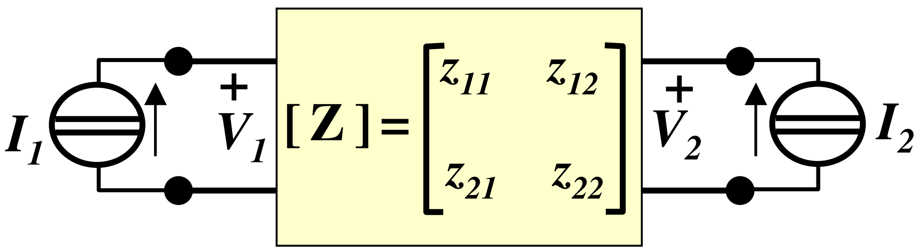


Il trasformatore ideale impone $I_1 = - n I_2$

Pertanto i due generatori esterni non sono indipendenti poiché devono soddisfare la relazione imposta

La rappresentazione [Z] non esiste per il trasformatore ideale

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

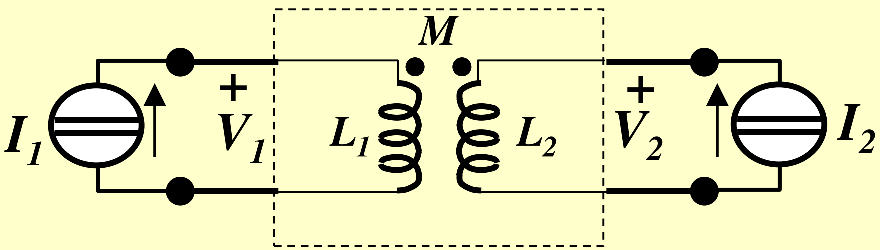
I_1, I_2 : grandezze indipendenti

V_1, V_2 : grandezze calcolate

Non vi deve essere nessun legame fra le grandezze indipendenti

Se ciò non fosse vero,
la rappresentazione [Z] non esisterebbe per la rete considerata

Esempi

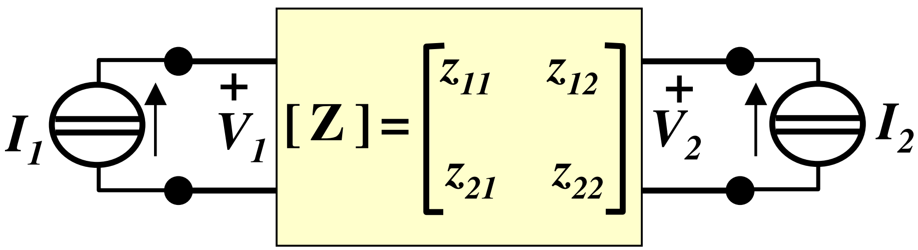


Per le induttanza accoppiate
non vi è nessun legame fra I_1 e I_2

$$\begin{cases} V_1 = s\,L_1 I_1 + s\,M I_2 \\ V_2 = s\,M I_1 + s\,L_2 I_2 \end{cases}$$

Pertanto $$[Z]=\begin{bmatrix} s\,L_1 & s\,M \\ s\,M & s\,L_2 \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

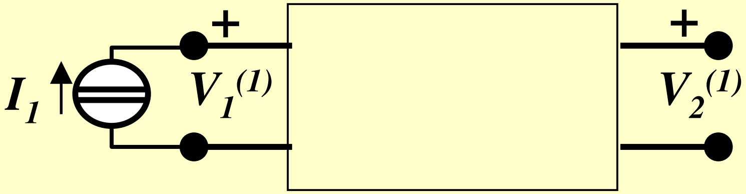
$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 : *grandezze indipendenti*

V_1, V_2 : *grandezze calcolate*

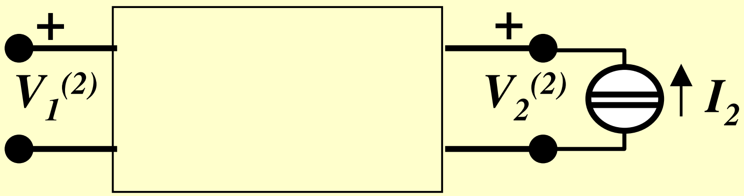
Calcolo della matrice [Z], noto lo schema interno della rete due porte

Dallo schema relativo all'alimentazione di riferimento, per la sovrapposizione degli effetti, si ha



$I_2 = 0$

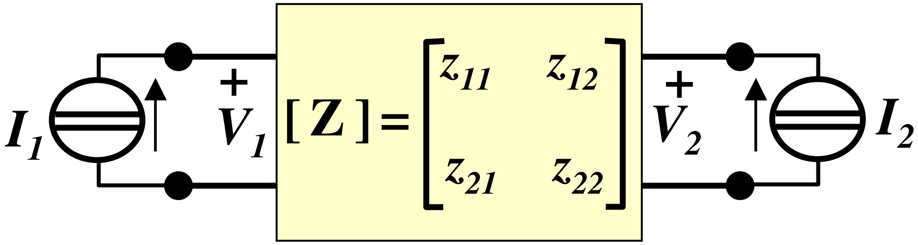
$$\begin{cases} V_1^{(1)} = z_{11} I_1 \quad ; \quad z_{11} = V_1^{(1)} / I_1 \\ V_2^{(1)} = z_{21} I_1 \quad ; \quad z_{21} = V_2^{(1)} / I_1 \end{cases}$$



$I_1 = 0$

$$\begin{cases} V_1^{(2)} = z_{12} I_2 \quad ; \quad z_{12} = V_1^{(2)} / I_2 \\ V_2^{(2)} = z_{22} I_2 \quad ; \quad z_{22} = V_2^{(2)} / I_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [Z], noto lo schema interno della rete due porte

Interpretazione circuitale degli elementi

z_{11} *: impedenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è aperta*
z_{21} *: impedenza di trasferimento fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è aperta*
z_{12} *: impedenza di trasferimento fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è aperta*
z_{22} *: impedenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è aperta*

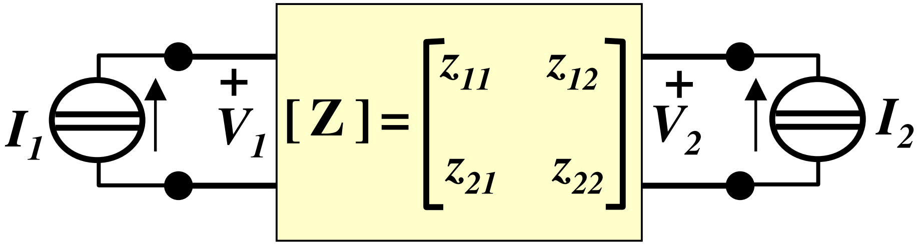
$I_2 = 0$

$$\begin{cases} V_1^{(1)} = z_{11} I_1 \quad ; \quad z_{11} = V_1^{(1)} / I_1 \\ V_2^{(1)} = z_{21} I_1 \quad ; \quad z_{21} = V_2^{(1)} / I_1 \end{cases}$$

$I_1 = 0$

$$\begin{cases} V_1^{(2)} = z_{12} I_2 \quad ; \quad z_{12} = V_1^{(2)} / I_2 \\ V_2^{(2)} = z_{22} I_2 \quad ; \quad z_{22} = V_2^{(2)} / I_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [Z], noto lo schema interno della rete due porte

Interpretazione circuitale degli elementi

z_{11} : impedenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è aperta
z_{21} : impedenza di trasferimento fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è aperta
z_{12} : impedenza di trasferimento fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è aperta
z_{22} : impedenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è aperta

Si noti che:

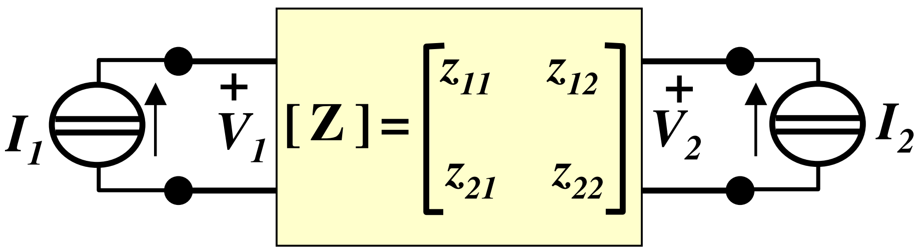
Gli elementi della matrice [Z] hanno tutti la dimensione di impedenza

Ogni elemento è definito lasciando sempre una porta a circuito aperto

Pertanto

[Z] è detta ***matrice delle impedenze a circuito aperto***

Rappresentazione [Z]



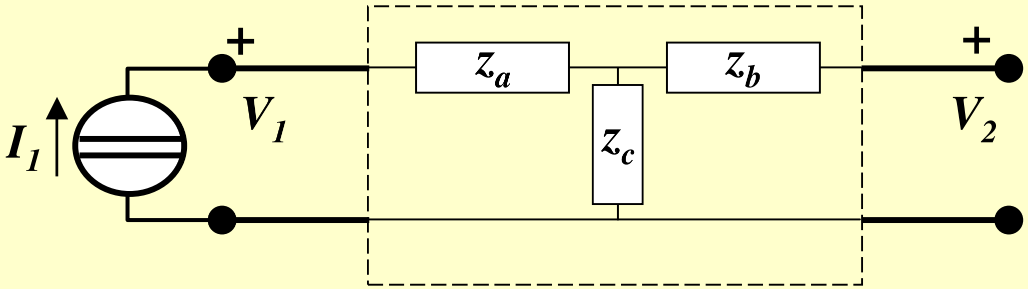
alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 ***: grandezze indipendenti***

V_1, V_2 ***: grandezze calcolate***

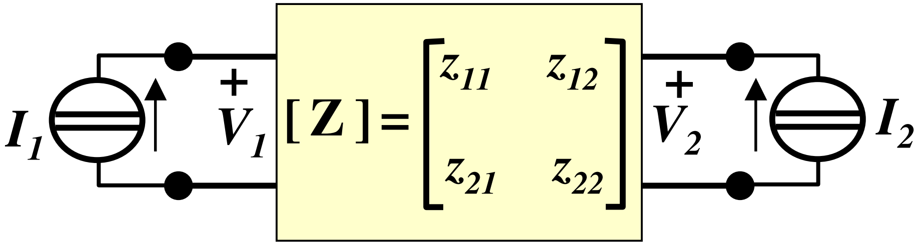
Esempio tipico : matrice [Z] della " rete a T "



$$z_{11} = V_1 / I_1 = z_a + z_c$$

$$z_{21} = V_2 / I_1 = z_c$$

Rappresentazione [Z]



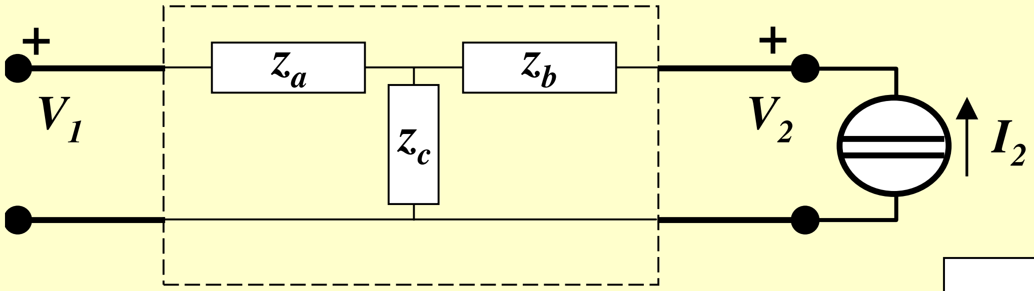
alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 ***: grandezze indipendenti***

V_1, V_2 ***: grandezze calcolate***

Esempio tipico : matrice [Z] della " rete a T "



$z_{11} = V_1 / I_1 \quad = z_a + z_c$

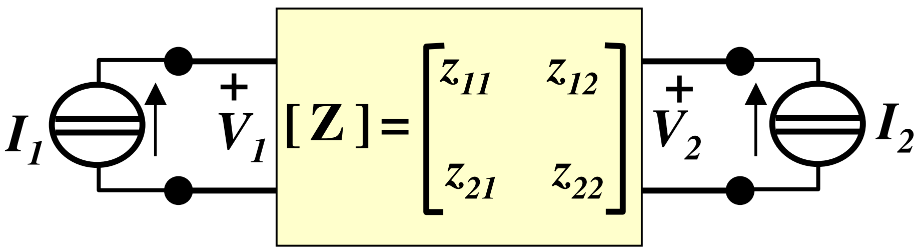
$z_{21} = V_2 / I_1 \quad = z_c$

$z_{12} = V_1 / I_2 \quad = z_c$

$z_{22} = V_2 / I_2 \quad = z_b + z_c$

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} z_a + z_c & z_c \\ z_c & z_b + z_c \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

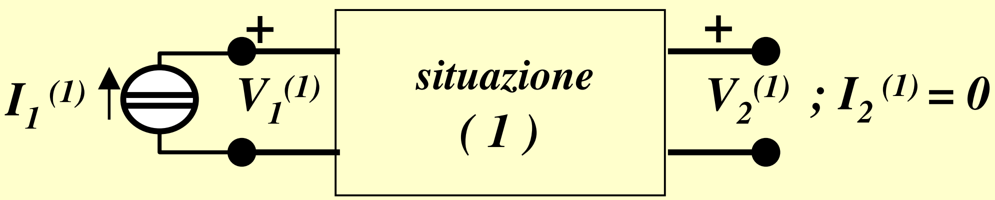
V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Z] : reciprocità e simmetria

$$\cancel{V_1^{(1)} I_1^{(2)}} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)} + \cancel{V_2^{(2)} I_2^{(1)}} \quad \Rightarrow$$

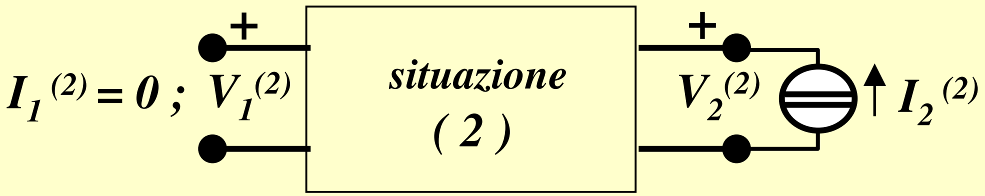
Rete due porte reciproca

$$V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)}$$



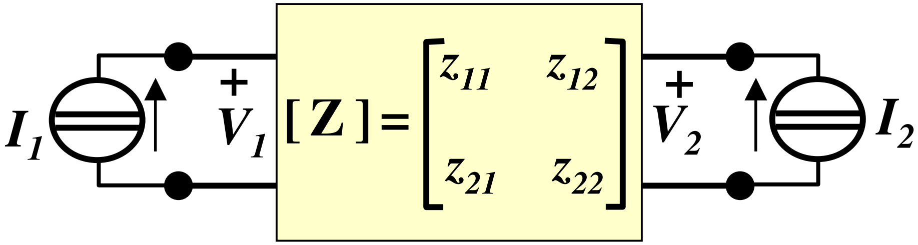
$$V_2^{(1)} = z_{21} I_1^{(1)} \; ; \; V_1^{(2)} = z_{12} I_2^{(2)}$$

$$z_{21} I_1^{(1)} I_2^{(2)} = z_{12} I_2^{(2)} I_1^{(1)}$$



$$\boxed{z_{21} = z_{12}}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Z] : reciprocità e simmetria

Rete due porte simmetrica

La definizione di [Z] è simmetrica rispetto alle porte (grandezze indipendenti dello stesso tipo, una per porta)

Pertanto, in una rete simmetrica, la matrice [Z] deve essere invariante rispetto allo scambio degli indici 1 e 2

$$\boxed{z_{11} = z_{22} \; ; \; z_{21} = z_{12}}$$

Rete due porte reciproca

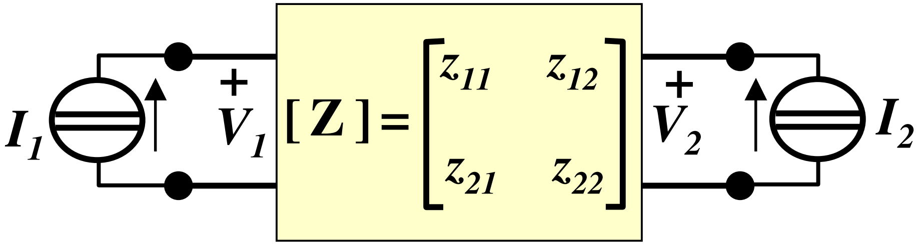
$$V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(2)} I_1^{(1)}$$

$$V_2^{(1)} = z_{21} I_1^{(1)} \; ; \; V_1^{(2)} = z_{12} I_2^{(2)}$$

$$z_{21} I_1^{(1)} I_2^{(2)} = z_{12} I_2^{(2)} I_1^{(1)}$$

$$\boxed{z_{21} = z_{12}}$$

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

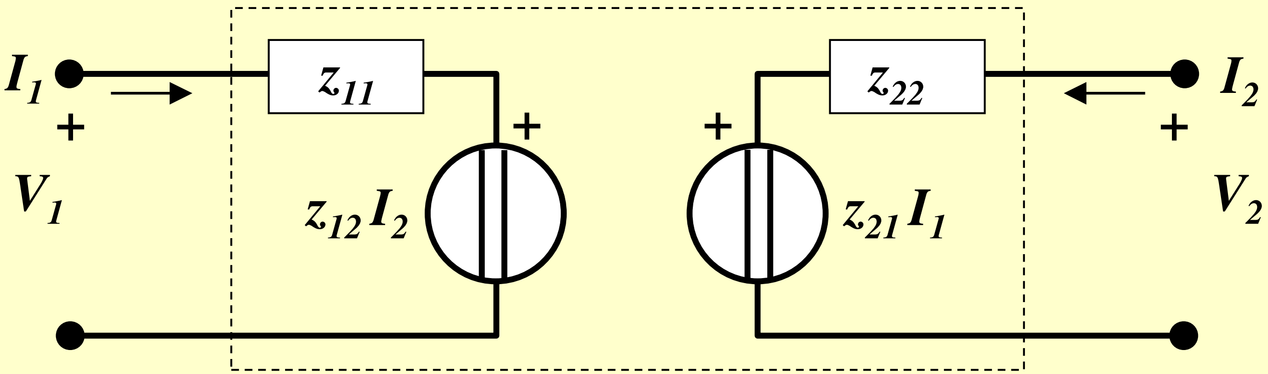
$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 *: grandezze indipendenti*

V_1, V_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Z] : schema equivalente

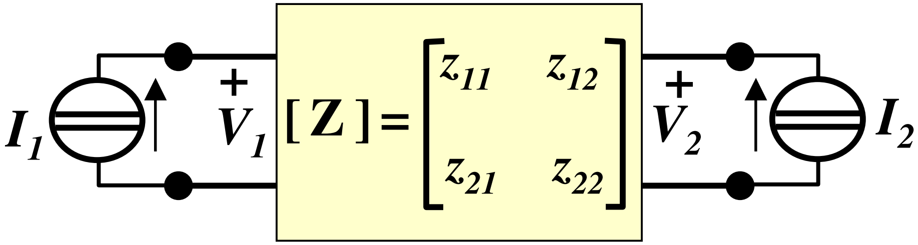
La rappresentazione [Z] può essere interpretata circuitalmente



Le impedenze di ingresso sono poste in serie alle porte

Si utilizzano due generatori di tensione controllati in corrente

Rappresentazione [Z]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases}$$

I_1, I_2 : *grandezze indipendenti*

V_1, V_2 : *grandezze calcolate*

Matrice [Z] : formule di passaggio

$$\Delta = z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}$$

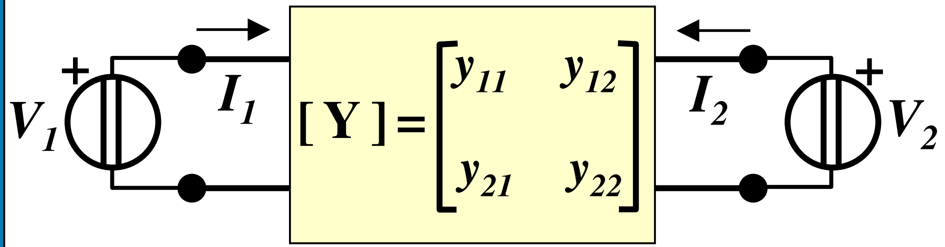
$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & \Delta \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta & z_{12} \\ -z_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{11}} \begin{bmatrix} 1 & z_{12} \\ z_{21} & \Delta \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

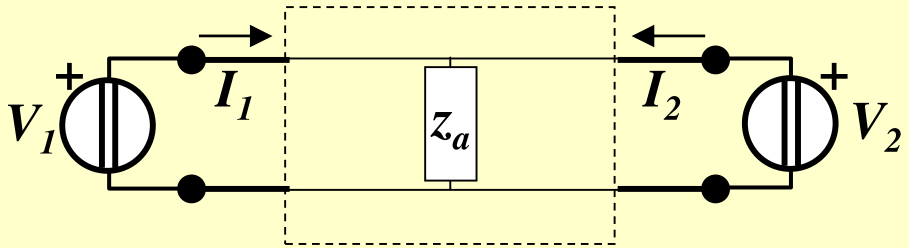
V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Non vi deve essere nessun legame fra le grandezze indipendenti

Se ciò non fosse vero,
la rappresentazione* [Y] *non esisterebbe per la rete considerata

Esempi

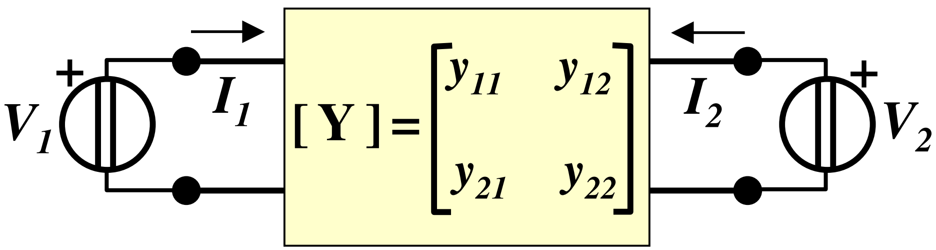


La costituzione interna della rete impone $V_1 = V_2$

Pertanto i due generatori esterni non sono indipendenti poiché devono soddisfare la relazione imposta

La rappresentazione* [Y] *non esiste per la rete considerata

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

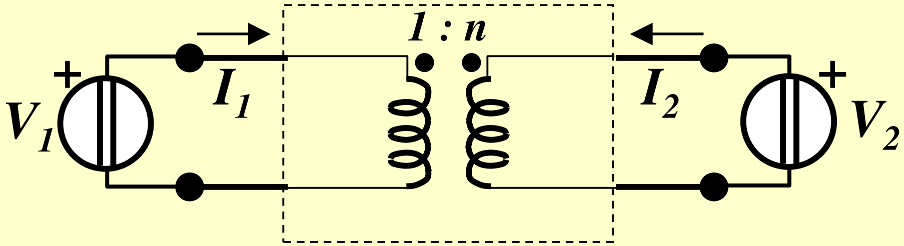
V_1 , V_2 *: grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 *: grandezze calcolate*

Non vi deve essere nessun legame fra le grandezze indipendenti

Se ciò non fosse vero,
la rappresentazione [Y] non esisterebbe per la rete considerata

Esempi

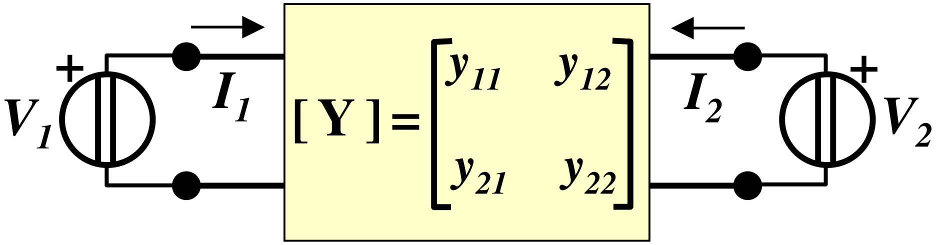


Il trasformatore ideale impone $V_2 = n\ V_1$

Pertanto i due generatori esterni non sono indipendenti poiché devono soddisfare la relazione imposta

La rappresentazione [Y] non esiste per il trasformatore ideale

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

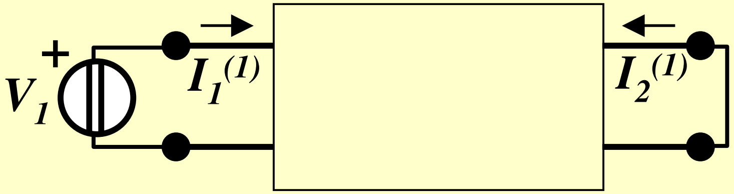
$$\begin{cases} I_1 = y_{11}\,V_1 + y_{12}\,V_2 \\ I_2 = y_{21}\,V_1 + y_{22}\,V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

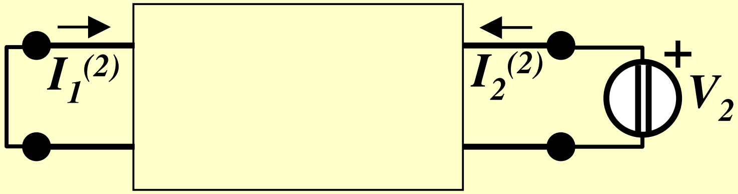
I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [Y] , noto lo schema interno della rete due porte

Dallo schema relativo all'alimentazione di riferimento, per la sovrapposizione degli effetti, si ha



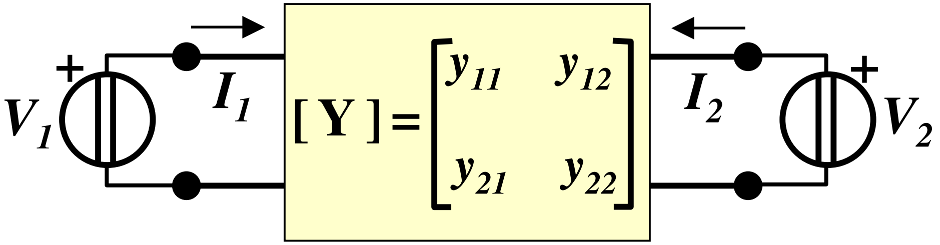
$V_2 = 0$
$$\begin{cases} I_1^{(1)} = y_{11}\,V_1 \;\; ; \;\; y_{11} = I_1^{(1)} / V_1 \\ I_2^{(1)} = y_{21}\,V_1 \;\; ; \;\; y_{21} = I_2^{(1)} / V_1 \end{cases}$$



$V_1 = 0$
$$\begin{cases} I_1^{(2)} = y_{12}\,V_2 \;\; ; \;\; y_{12} = I_1^{(2)} / V_2 \\ I_2^{(2)} = y_{22}\,V_2 \;\; ; \;\; y_{22} = I_2^{(2)} / V_2 \end{cases}$$

Tor Vergata

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [Y] , noto lo schema interno della rete due porte

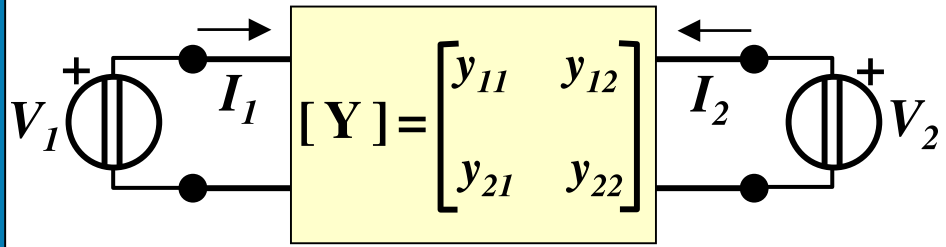
Interpretazione circuitale degli elementi

y_{11} : *ammettenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è in corto*	
y_{21} : *ammettenza di trasferimento fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è in corto*	
y_{12} : *ammettenza di trasferimento fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è in corto*	
y_{22} : *ammettenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è in corto*	

$$V_2 = 0 \qquad \begin{cases} I_1^{(1)} = y_{11} V_1 \;\; ; \;\; y_{11} = I_1^{(1)} / V_1 \\ I_2^{(1)} = y_{21} V_1 \;\; ; \;\; y_{21} = I_2^{(1)} / V_1 \end{cases}$$

$$V_1 = 0 \qquad \begin{cases} I_1^{(2)} = y_{12} V_2 \;\; ; \;\; y_{12} = I_1^{(2)} / V_2 \\ I_2^{(2)} = y_{22} V_2 \;\; ; \;\; y_{22} = I_2^{(2)} / V_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 ***: grandezze indipendenti***

I_1 , I_2 ***: grandezze calcolate***

Calcolo della matrice [Y] , noto lo schema interno della rete due porte

Interpretazione circuitale degli elementi

y_{11} : ***ammettenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è in corto***
y_{21} : ***ammettenza di trasferimento fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è in corto***
y_{12} : ***ammettenza di trasferimento fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è in corto***
y_{22} : ***ammettenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è in corto***

Si noti che:

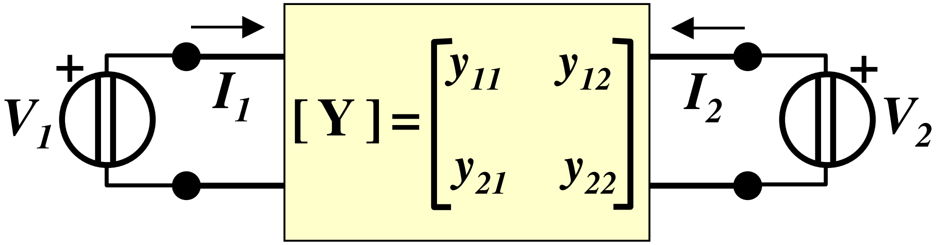
Gli elementi della matrice [Y] hanno tutti la dimensione di ammettenza

Ogni elemento è definito ponendo sempre una porta in corto circuito

Pertanto

[Y] ***è detta*** ***matrice delle ammettenze in corto circuito***

Rappresentazione [Y]



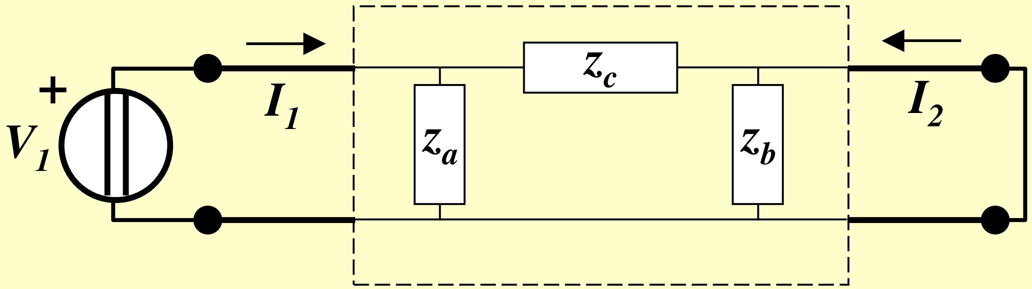
alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Esempio tipico : matrice [Y] della " rete a Π "



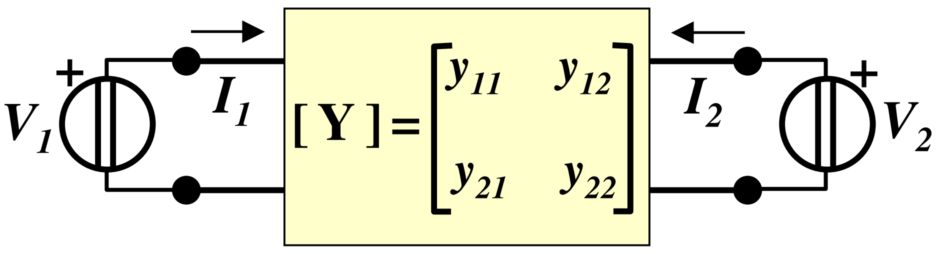
$y_a = 1 / z_a$
$y_b = 1 / z_b$
$y_c = 1 / z_c$

$y_{11} = I_1 / V_1 = y_a + y_c$

$y_{21} = I_2 / V_1 = - y_c$

Tor Vergata

Rappresentazione [Y]



$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

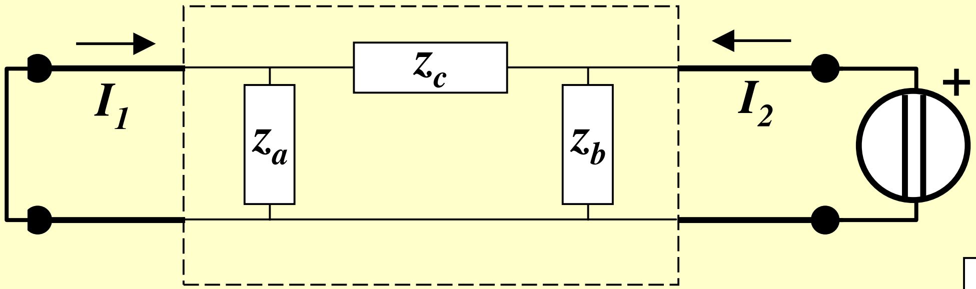
alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : grandezze indipendenti

I_1 , I_2 : grandezze calcolate

Esempio tipico : matrice [Y] della " rete a Π "



$y_a = 1 / z_a$
$y_b = 1 / z_b$
$y_c = 1 / z_c$

$y_{11} = I_1 / V_1 \quad = y_a + y_c$

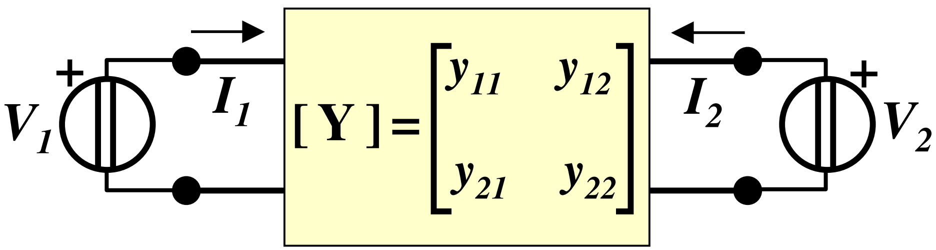
$y_{21} = I_2 / V_1 \quad = - y_c$

$y_{12} = V_1 / I_2 \quad = - y_c$

$y_{22} = V_2 / I_2 \quad = y_b + y_c$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_a + y_c & - y_c \\ - y_c & y_b + y_c \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Matrice [Y] : reciprocità e simmetria

$$V_1^{(1)} I_1^{(2)} + \cancel{V_2^{(1)} I_2^{(2)}} = \cancel{V_1^{(2)} I_1^{(1)}} + V_2^{(2)} I_2^{(1)} \quad \Rightarrow$$

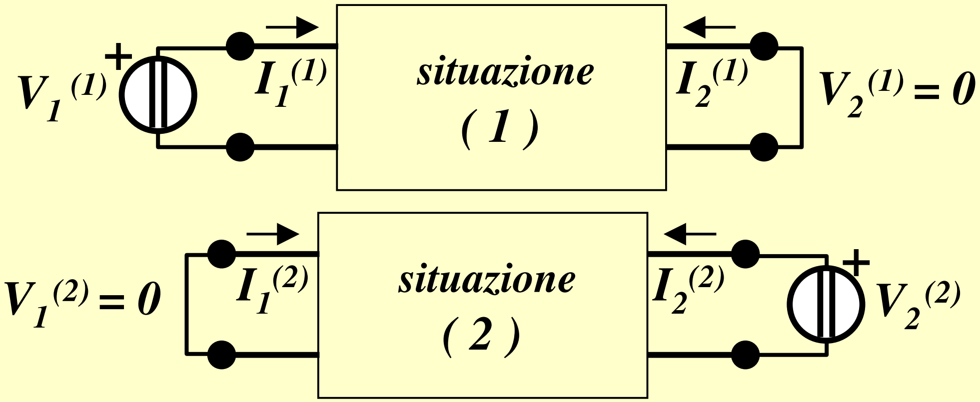
Rete due porte reciproca

$$V_1^{(1)} I_1^{(2)} = V_2^{(2)} I_2^{(1)}$$

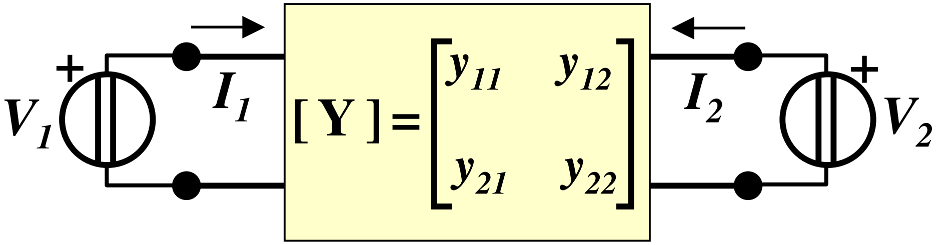
$$I_1^{(2)} = y_{12} V_2^{(2)} \; ; \; I_2^{(1)} = y_{21} V_2^{(1)}$$

$$y_{12} V_1^{(1)} V_2^{(2)} = y_{21} V_2^{(2)} V_1^{(1)}$$

$$\boxed{y_{21} = y_{12}}$$



Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 *: grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Y] : reciprocità e simmetria

Rete due porte simmetrica

La definizione di [Y] è simmetrica rispetto alle porte (grandezze indipendenti dello stesso tipo, una per porta)

Pertanto, in una rete simmetrica, la matrice [Y] deve essere invariante rispetto allo scambio degli indici 1 e 2

$$\boxed{y_{11} = y_{22} \;;\; y_{21} = y_{12}}$$

Rete due porte reciproca

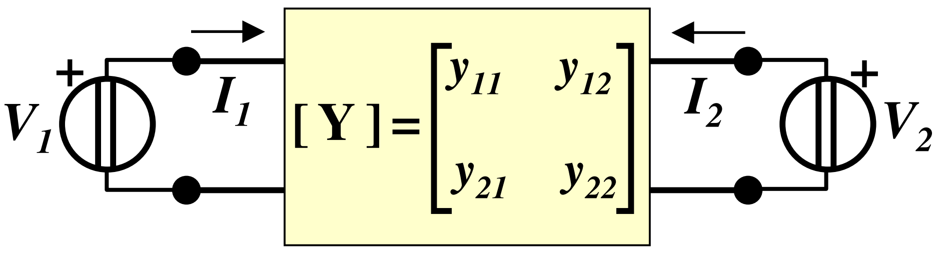
$$V_1^{(1)} I_1^{(2)} = V_2^{(2)} I_2^{(1)}$$

$$I_1^{(2)} = y_{12} V_2^{(2)} \;;\; I_2^{(1)} = y_{21} V_2^{(1)}$$

$$y_{12} V_1^{(1)} V_2^{(2)} = y_{21} V_2^{(2)} V_1^{(1)}$$

$$\boxed{y_{21} = y_{12}}$$

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

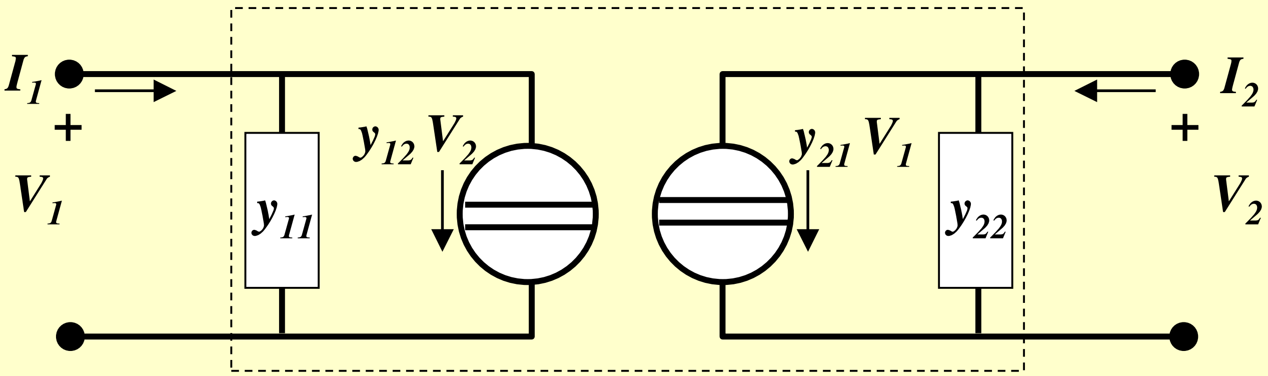
$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 *: grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Y] : schema equivalente

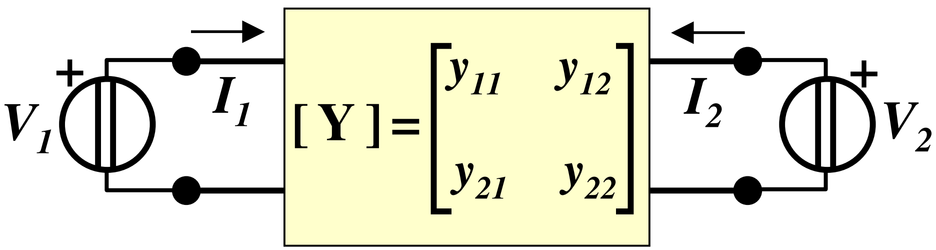
La rappresentazione [Y] può essere interpretata circuitalmente



Le ammettenze di ingresso sono poste in parallelo alle porte

Si utilizzano due generatori di corrente controllati in tensione

Rappresentazione [Y]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{cases}$$

V_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Matrice* [Y] *: formule di passaggio

$$\Delta = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$$

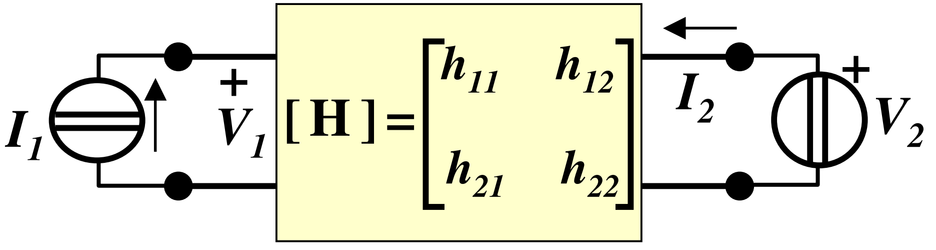
$$[\,Z\,] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{-1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ \Delta & y_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\,H\,] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ y_{21} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$[\,G\,] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{22}} \begin{bmatrix} \Delta & y_{12} \\ -y_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [H]



alimentazione di riferimento

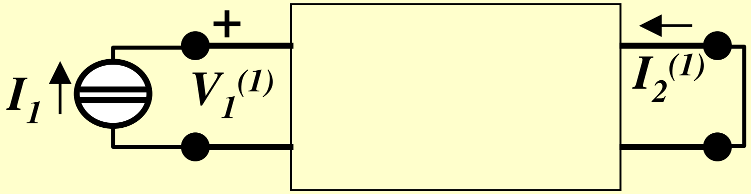
$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

I_1 , V_2 **: *grandezze indipendenti***

V_1 , I_2 **: *grandezze calcolate***

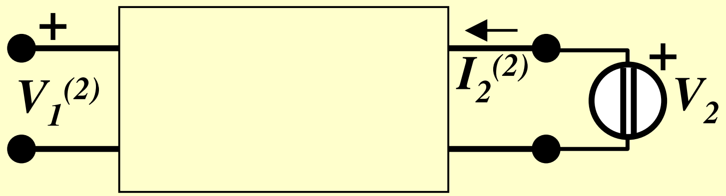
Calcolo della matrice* [H] *, noto lo schema interno della rete due porte

Dallo schema relativo all'alimentazione di riferimento, per la sovrapposizione degli effetti, si ha



$V_2 = 0$

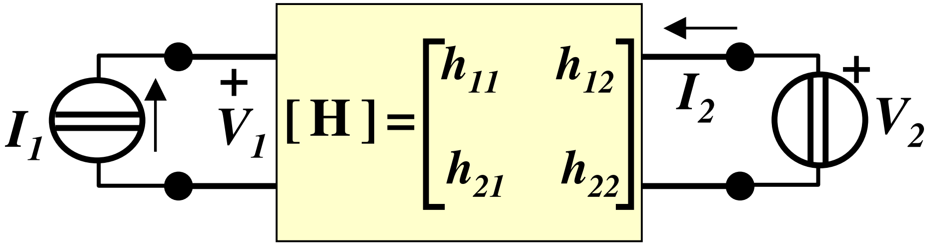
$$\begin{cases} V_1^{(1)} = h_{11} I_1 \quad ; \quad h_{11} = V_1^{(1)} / I_1 \\ I_2^{(1)} = h_{21} I_1 \quad ; \quad h_{21} = I_2^{(1)} / I_1 \end{cases}$$



$I_1 = 0$

$$\begin{cases} V_1^{(2)} = h_{12} V_2 \;;\; h_{12} = V_1^{(2)} / V_2 \\ I_2^{(2)} = h_{22} V_2 \;;\; h_{22} = I_2^{(2)} / V_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [H]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

I_1 , V_2 *: grandezze indipendenti*

V_1 , I_2 *: grandezze calcolate*

Calcolo della matrice* [H]*, noto lo schema interno della rete due porte

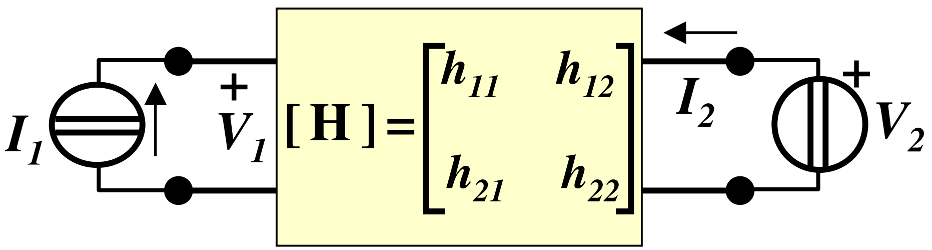
Interpretazione circuitale degli elementi

h_{11} *: impedenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è in corto*
h_{21} *: rapporto di correnti fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è in corto*
h_{12} *: rapporto di tensioni fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è aperta*
h_{22} *: ammettenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è aperto*

$$V_2 = 0 \quad \begin{cases} V_1^{(1)} = h_{11} I_1 \;\; ; \;\; h_{11} = V_1^{(1)} / I_1 \\ I_2^{(1)} = h_{21} I_1 \;\; ; \;\; h_{21} = I_2^{(1)} / I_1 \end{cases}$$

$$I_1 = 0 \quad \begin{cases} V_1^{(2)} = h_{12} V_2 \;\; ; \;\; h_{12} = V_1^{(2)} / V_2 \\ I_2^{(2)} = h_{22} V_2 \;\; ; \;\; h_{22} = I_2^{(2)} / V_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [H]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

I_1 , V_2 : *grandezze indipendenti*

V_1 , I_2 : *grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [H], noto lo schema interno della rete due porte

Interpretazione circuitale degli elementi

h_{11} : *impedenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è in corto*
h_{21} : *rapporto di correnti fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è in corto*
h_{12} : *rapporto di tensioni fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è aperta*
h_{22} : *ammettenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è aperto*

Si noti che:

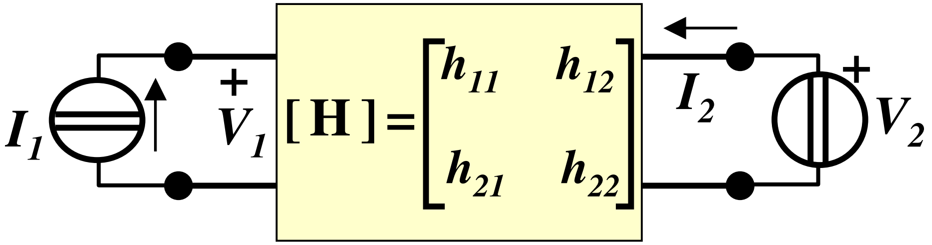
Gli elementi della matrice **[H]** *sono differenti (impedenza, ammettenza, rapporto di tensioni e di correnti)*

Gli elementi sono definiti ponendo la porta 1 aperta, e la 2 in corto circuito

Pertanto

[H] *è detta* *matrice ibrida*

Rappresentazione [H]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

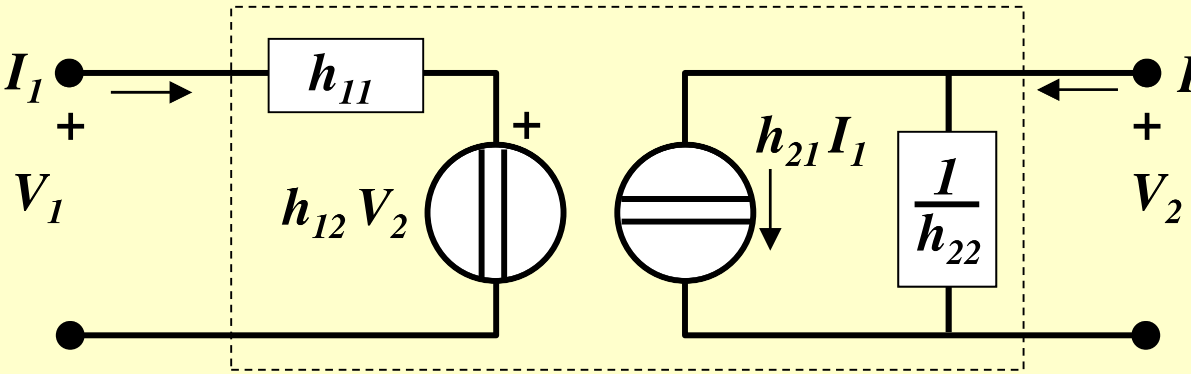
$I_1 \, , V_2$ *: grandezze indipendenti*

$V_1 \, , I_2$ *: grandezze calcolate*

Matrice [H]

Reciprocità $h_{21} = - h_{12}$; $h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21} = 1$ **Simmetria**

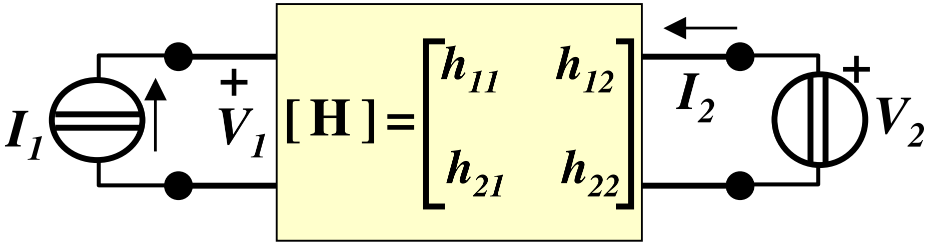
Schema equivalente della rappresentazione [H]



Impedenze di ingresso poste in serie e parallelo alle porte

Si utilizzano due generatori controllati di tipo diverso

Rappresentazione [H]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

I_1 , V_2 *: grandezze indipendenti*

V_1 , I_2 *: grandezze calcolate*

Matrice [Y] : formule di passaggio $\quad \Delta = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}$

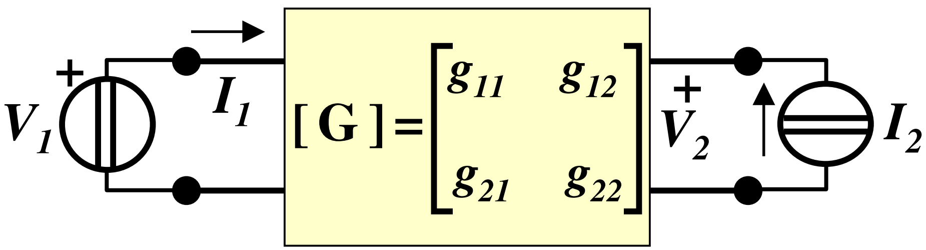
$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \Delta & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{-1}{h_{21}} \begin{bmatrix} \Delta & -h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$$

Rappresentazione [G]



alimentazione di riferimento

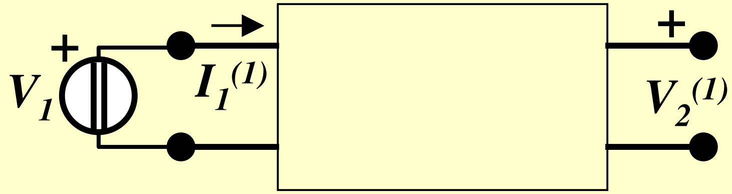
$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

V_1 , I_2 : grandezze indipendenti

I_1 , V_2 : grandezze calcolate

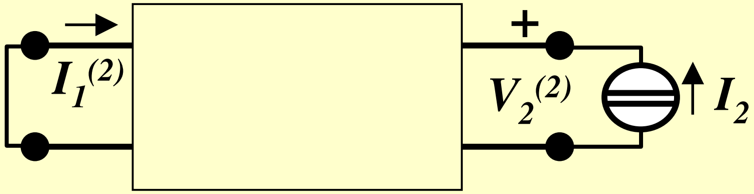
Calcolo della matrice [G] , noto lo schema interno della rete due porte

Dallo schema relativo all'alimentazione di riferimento, per la sovrapposizione degli effetti, si ha



$I_2 = 0$

$$\begin{cases} I_1^{(1)} = g_{11} V_1 \; ; \; g_{11} = I_1^{(1)} / V_1 \\ V_2^{(1)} = g_{21} V_1 \; ; \; g_{21} = V_2^{(1)} / V_1 \end{cases}$$

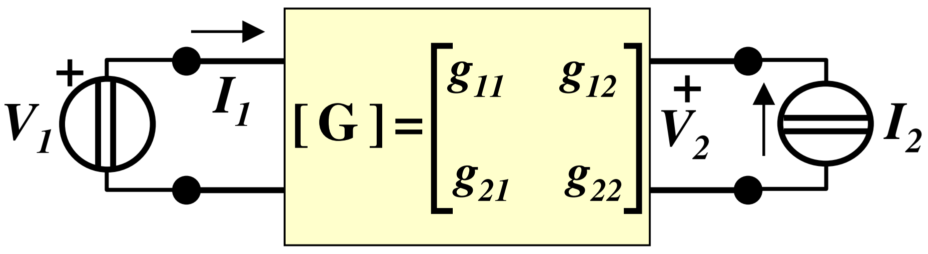


$V_1 = 0$

$$\begin{cases} I_1^{(2)} = g_{12} I_2 \; ; \; g_{12} = I_1^{(2)} / I_2 \\ V_2^{(2)} = g_{22} I_2 \; ; \; g_{22} = V_2^{(2)} / I_2 \end{cases}$$

Tor Vergata

Rappresentazione [G]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

V_1 , I_2 : grandezze indipendenti

I_1 , V_2 : grandezze calcolate

Calcolo della matrice [G], noto lo schema interno della rete due porte

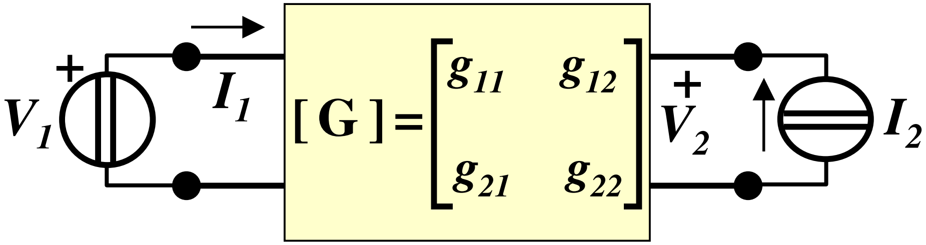
Interpretazione circuitale degli elementi

g_{11} : ammettenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è aperta
g_{21} : rapporto di tensioni fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è aperta
g_{12} : rapporto di correnti fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è in corto
g_{22} : impedenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è in corto

$$I_2 = 0 \qquad \begin{cases} I_1^{(1)} = g_{11} V_1 \quad ; \quad g_{11} = I_1^{(1)} / V_1 \\ V_2^{(1)} = g_{21} V_1 \quad ; \quad g_{21} = V_2^{(1)} / V_1 \end{cases}$$

$$V_1 = 0 \qquad \begin{cases} I_1^{(2)} = g_{12} I_2 \quad ; \quad g_{12} = I_1^{(2)} / I_2 \\ V_2^{(2)} = g_{22} I_2 \quad ; \quad g_{22} = V_2^{(2)} / I_2 \end{cases}$$

Rappresentazione [G]



$$[\,G\,] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

V_1 , I_2 : grandezze indipendenti

I_1 , V_2 : grandezze calcolate

Calcolo della matrice [G] , noto lo schema interno della rete due porte

Interpretazione circuitale degli elementi

g_{11} : ammettenza di ingresso alla porta 1 quando la porta 2 è aperta
g_{21} : rapporto di tensioni fra le porte 1 e 2, quando la porta 2 è aperta
g_{12} : rapporto di correnti fra le porte 2 e 1, quando la porta 1 è in corto
g_{22} : impedenza di ingresso alla porta 2 quando la porta 1 è in corto

Si noti che:

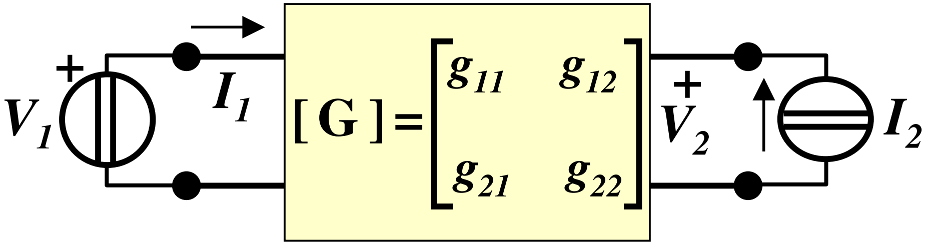
Gli elementi della matrice [G] sono differenti (impedenza, ammettenza, rapporto di tensioni e di correnti)

Gli elementi sono definiti ponendo la porta 1 in corto circuito, e la 2 aperta

Pertanto

[G] è detta matrice ibrida

Rappresentazione [G]



alimentazione di riferimento

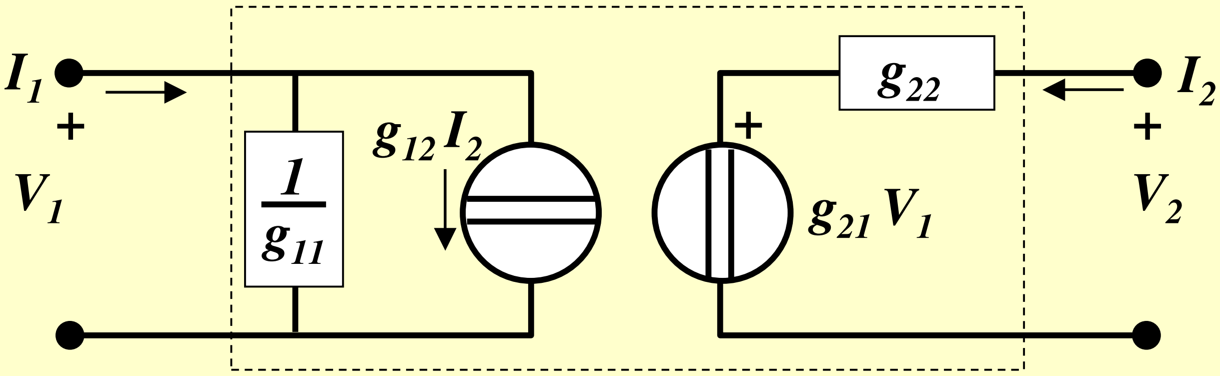
$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

V_1 , I_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , V_2 : *grandezze calcolate*

Matrice [G] — *Reciprocità* $g_{21} = - g_{12}$; $g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21} = 1$ *Simmetria*

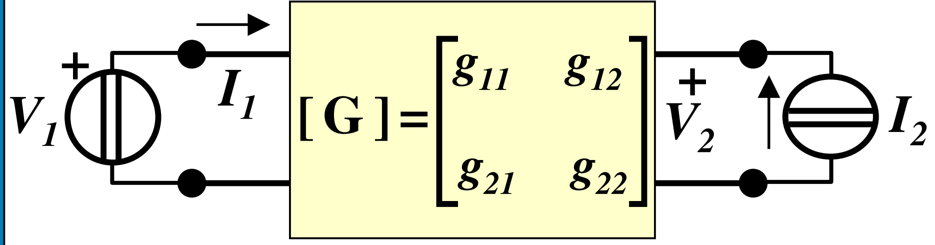
Schema equivalente della rappresentazione [G]



Impedenze di ingresso poste in parallelo e in serie alle porte

Si utilizzano due generatori controllati di tipo diverso

Rappresentazione [G]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

$V_1 \,, I_2$: *grandezze indipendenti*

$I_1 \,, V_2$: *grandezze calcolate*

Matrice* [Y] *: formule di passaggio

$$\Delta = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}$$

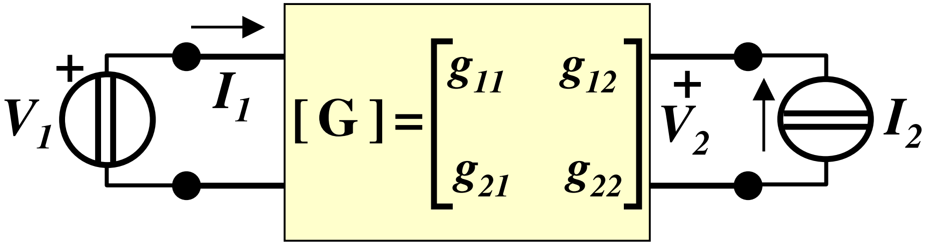
$$[\,Z\,] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$[\,T\,] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =$$

$$[\,Y\,] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} =$$

$$[\,H\,] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} =$$

Rappresentazione [G]



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} I_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} I_2 \end{cases}$$

V_1 , I_2 : *grandezze indipendenti*

I_1 , V_2 : *grandezze calcolate*

Matrice* [Y] *: formule di passaggio

$$\Delta = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}$$

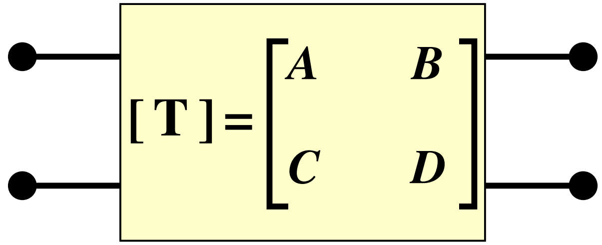
$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} 1 & g_{22} \\ g_{11} & \Delta \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \Delta & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$$

Matrice di trasmissione



$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

$V_2\;,I_2$: *grandezze indipendenti*

$V_1\;,\;I_1$: *grandezze calcolate*

La rappresentazione mediante la matrice di trasmissione è molto utilizzata poiché dà conto delle alterazioni introdotte dalla rete due porte sulle tensioni e sulle correnti da una porta all'altra

Con tale matrice si può passare dalla coppia tensione corrente alla porta 2 , alla analoga coppia alla porta 1

$$[\,V_2\;,I_2\,] \;\Rightarrow\; [\,V_1\;,\;I_1\,]$$

Non esiste però una alimentazione di riferimento semplice, poiché non è possibile imporre sia la corrente sia la tensione a una sola porta, lasciando libera l'altra.

Pertanto, o si considera la rappresentazione [T] come una rappresentazione puramente formale, oppure si ricorre ad una alimentazione di riferimento di tipo attivo che fa uso del nullore

Matrice di trasmissione

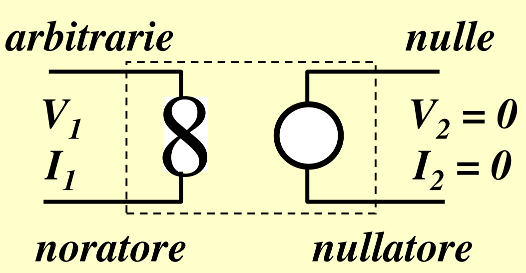
$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

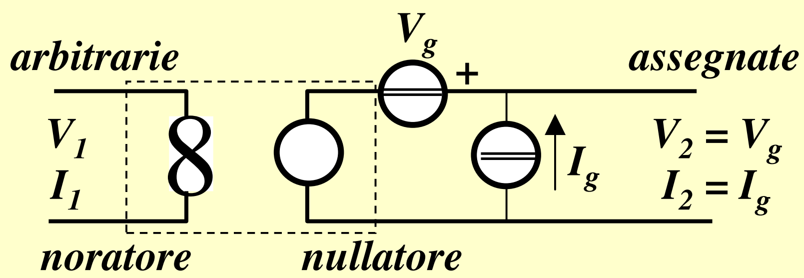
$V_2\ ,\ I_2$ *: grandezze indipendenti*

$V_1\ ,\ I_1$ *: grandezze calcolate*

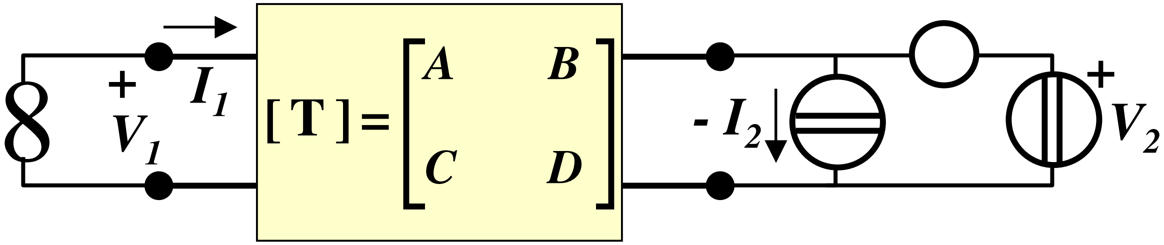
Il nullore è un elemento attivo due porte, tale da imporre tensioni e correnti nulle a una porta, e del tutto arbitrarie all'altra porta



Mediante un generatore ideale di tensione e uno di corrente si possono assegnare valori dati alla porta del nullatore



Matrice di trasmissione



alimentazione di riferimento

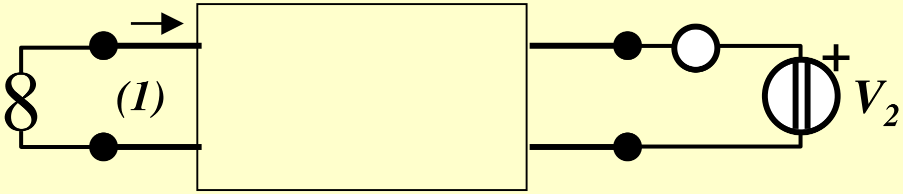
$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

V_2 , I_2 : *grandezze indipendenti*

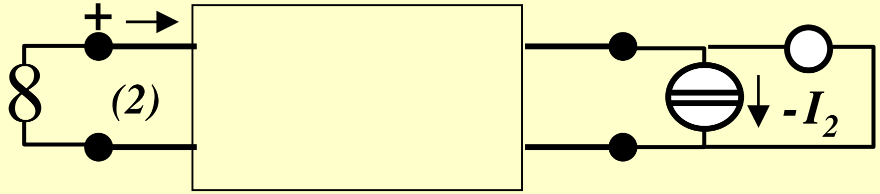
V_1 , I_1 : *grandezze calcolate*

Calcolo della matrice [T], noto lo schema interno della rete due porte

Dallo schema relativo all'alimentazione di riferimento, per la sovrapposizione degli effetti, si ha



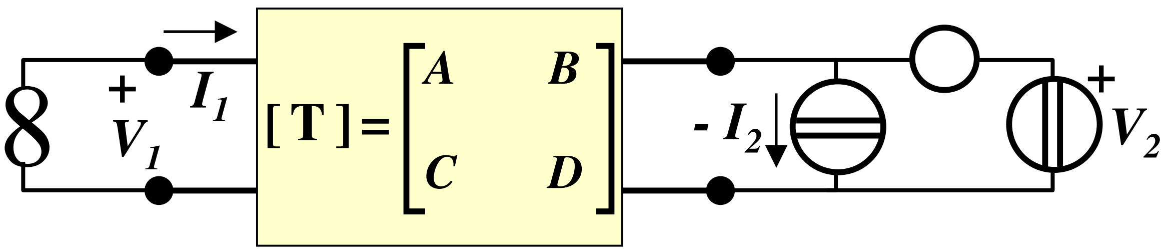
$$I_2 = 0 \quad \begin{cases} V_1^{(1)} = A\,V_2 \\ I_1^{(1)} = C\,V_2 \end{cases}$$



$$V_2 = 0 \quad \begin{cases} V_1^{(2)} = B\,(-I_2) \\ I_1^{(2)} = D\,(-I_2) \end{cases}$$

A, B, C, D : funzioni di trasferimento

Matrice di trasmissione



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

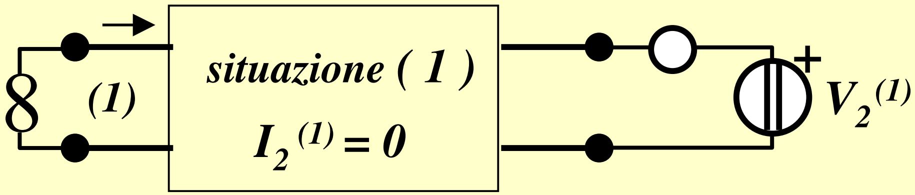
$V_2\ ,\ I_2$: grandezze indipendenti

$V_1\ ,\ I_1$: grandezze calcolate

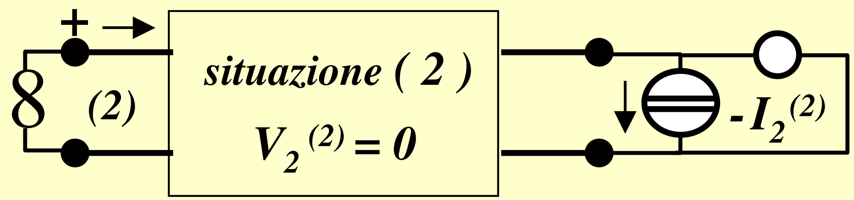
Matrice [T] : reciprocità $\Rightarrow$ $V_1^{(1)}\ I_1^{(2)} + V_2^{(1)}\ I_2^{(2)} = V_1^{(2)}\ I_1^{(1)} + \cancel{V_2^{(2)}}\ I_2^{(1)}$

$$\boxed{-A\,D + 1 = -B\,C}$$

$$\boxed{A\,V_2^{(1)}\,[\,-D\,I_2^{(2)}\,] + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = [\,-B\,I_2^{(2)}\,]\,C\,V_2^{(1)}}$$



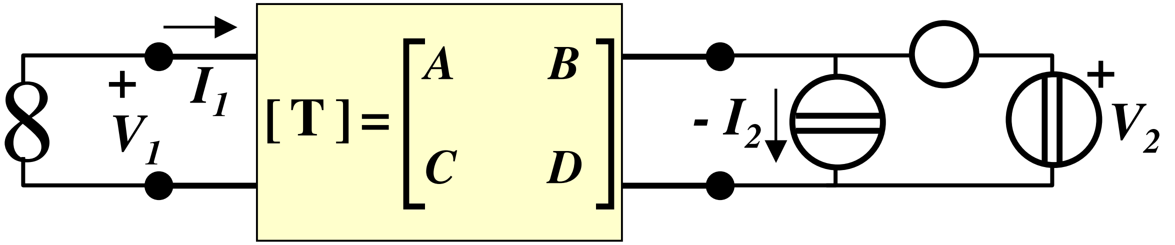
$$\boxed{\begin{aligned} V_1^{(1)} &= A\,V_2^{(1)} \\ I_1^{(1)} &= C\,V_2^{(1)} \end{aligned}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} V_1^{(2)} &= -B\,I_2^{(2)} \\ I_1^{(2)} &= -D\,I_2^{(2)} \end{aligned}}$$

Tor Vergata

Matrice di trasmissione



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

$V_2\ ,\ I_2$ *: grandezze indipendenti*

$V_1\ ,\ I_1$ *: grandezze calcolate*

Matrice* [T] *: reciprocità $\boxed{A\,D - B\,C = 1}$

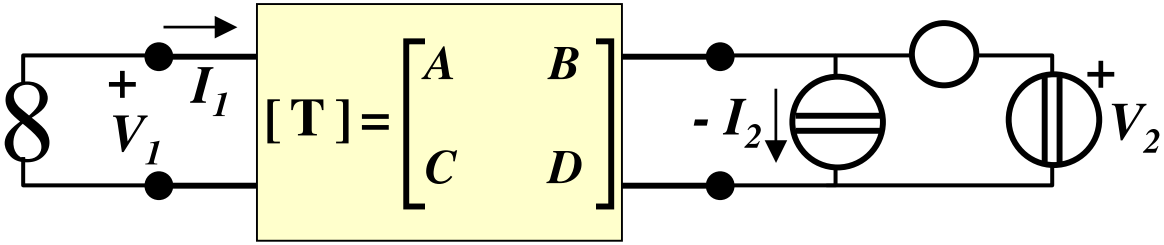
---

simmetria $\boxed{A\,D - B\,C = 1}$ $\boxed{A = D}$

Le formule di trasformazione della matrice* [T] *in altre matrici sono poco utilizzate, essendo più usuale la determinazione della matrice* [T] *a partire dalle altre

La matrice* [T] *è detta matrice di trasmissione inversa.
La matrice* [T’] *, matrice di trasmissione diretta, è molto meno utilizzata

Matrice di trasmissione



alimentazione di riferimento

$$\begin{cases} V_1 = A\,V_2 - B\,I_2 \\ I_1 = C\,V_2 - D\,I_2 \end{cases}$$

$V_2\ ,\ I_2$: *grandezze indipendenti*

$V_1\ ,\ I_1$: *grandezze calcolate*

Matrice [T] : formule di passaggio

$$\Delta = A\,D - B\,C$$

$$[\,Z\,] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \Delta \\ 1 & D \end{bmatrix}$$

$$[\,H\,] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \Delta \\ -1 & C \end{bmatrix}$$

$$[\,Y\,] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\Delta \\ -1 & A \end{bmatrix}$$

$$[\,G\,] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} C & -\Delta \\ 1 & B \end{bmatrix}$$

Connessione serie - serie

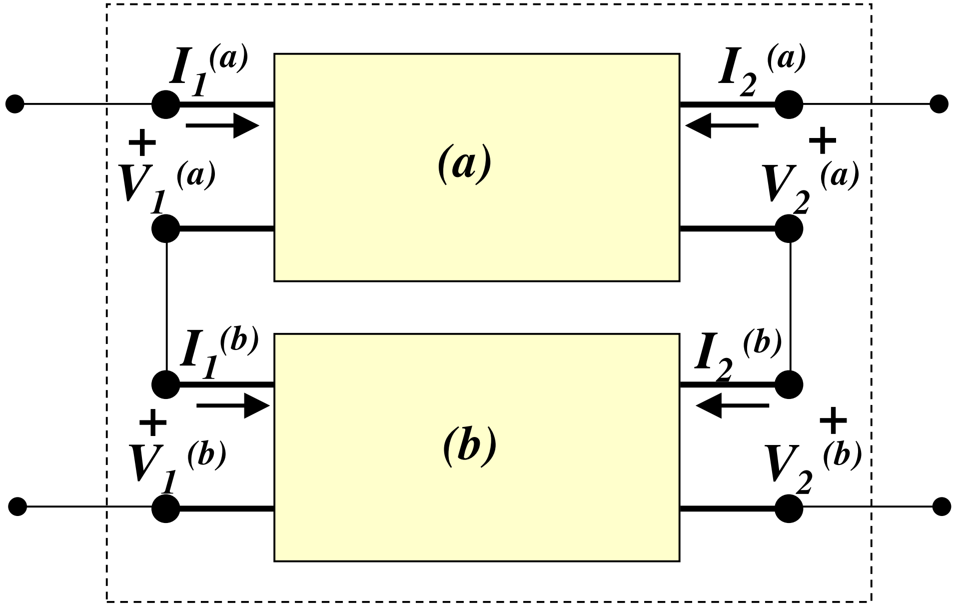
Le reti due porte possono essere connesse fra loro in vari modi

Le connessioni elementari consistono nel collegamento di due reti due porte in modo da ottenere una rete due porte più complessa

Il problema principale consiste nel determinare la rappresentazione della rete complessa a partire da rappresentazioni delle reti iniziali

Occorre anche verificare che le reti iniziali si comportino ancora come reti due porte dopo la connessione
(prove di validità)

Connessione serie - serie



$$\begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(a)} & z_{12}^{(a)} \\ z_{21}^{(a)} & z_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(b)} & z_{12}^{(b)} \\ z_{21}^{(b)} & z_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

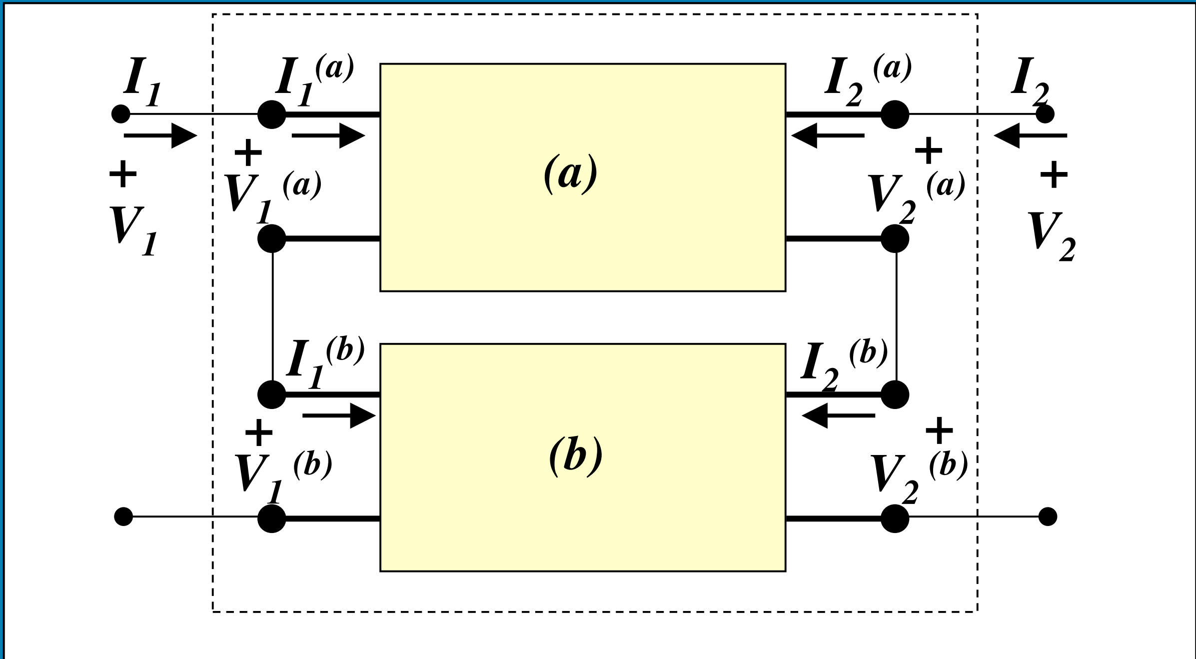
$$\left[V^{(a)}\right] = \left[Z^{(a)}\right]\left[I^{(a)}\right]$$

$$\left[V^{(b)}\right] = \left[Z^{(b)}\right]\left[I^{(b)}\right]$$

Le due reti due porte (a) e (b) possono essere connesse in modo da porre in serie le due porte (1) e (2) rispettivamente, ottenendo una connessione detta serie - serie

Si ottiene così una rete due porte globale, che occorre caratterizzare opportunamente

Connessione serie - serie



$$\begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(a)} & z_{12}^{(a)} \\ z_{21}^{(a)} & z_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(b)} & z_{12}^{(b)} \\ z_{21}^{(b)} & z_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$\left[V^{(a)}\right] = \left[Z^{(a)}\right]\left[I^{(a)}\right]$$

$$\left[V^{(b)}\right] = \left[Z^{(b)}\right]\left[I^{(b)}\right]$$

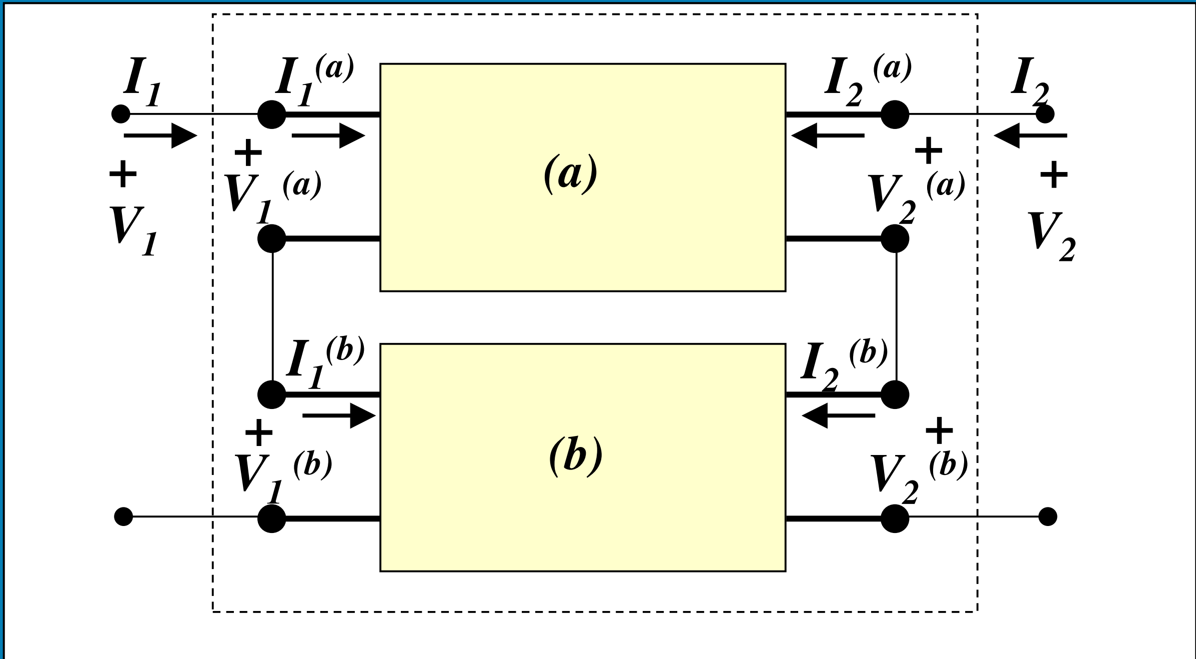
Dette V_1, I_1, V_2, I_2 le tensioni di porta della rete globale, la connessione serie serie impone le seguenti relazioni fra le grandezze elettriche

$$\begin{cases} V_1 = V_1^{(a)} + V_1^{(b)} \\ V_2 = V_2^{(a)} + V_2^{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_1^{(a)} = I_1^{(b)} \\ I_2 = I_2^{(a)} = I_2^{(b)} \end{cases}$$

Tor Vergata

Connessione serie - serie



$$\begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(a)} & z_{12}^{(a)} \\ z_{21}^{(a)} & z_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(b)} & z_{12}^{(b)} \\ z_{21}^{(b)} & z_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$\left[V^{(a)}\right] = \left[Z^{(a)}\right]\left[I^{(a)}\right]$$

$$\left[V^{(b)}\right] = \left[Z^{(b)}\right]\left[I^{(b)}\right]$$

$$[V] = \left[V^{(a)}\right] + \left[V^{(b)}\right] = \left[Z^{(a)}\right]\left[I^{(a)}\right] + \left[Z^{(b)}\right]\left[I^{(b)}\right] =$$

$$= \left[Z^{(a)}\right][I] + \left[Z^{(b)}\right][I] = \left\{\left[Z^{(a)}\right] + \left[Z^{(b)}\right]\right\}[I] = [Z][I]$$

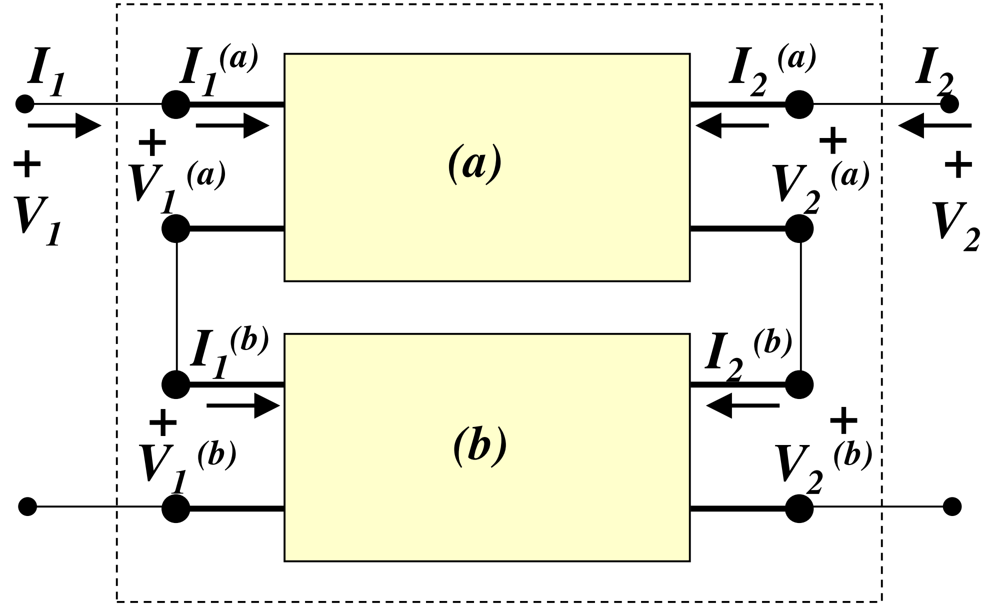
$$[I] = \left[I^{(a)}\right] = \left[I^{(b)}\right]$$

Pertanto si ha

$$[Z] = \left[Z^{(a)}\right] + \left[Z^{(b)}\right]$$

Tor Vergata

Connessione serie - serie



$$\begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(a)} & z_{12}^{(a)} \\ z_{21}^{(a)} & z_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^{(b)} & z_{12}^{(b)} \\ z_{21}^{(b)} & z_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$[V^{(a)}] = [Z^{(a)}][I^{(a)}]$$
$$[V^{(b)}] = [Z^{(b)}][I^{(b)}]$$

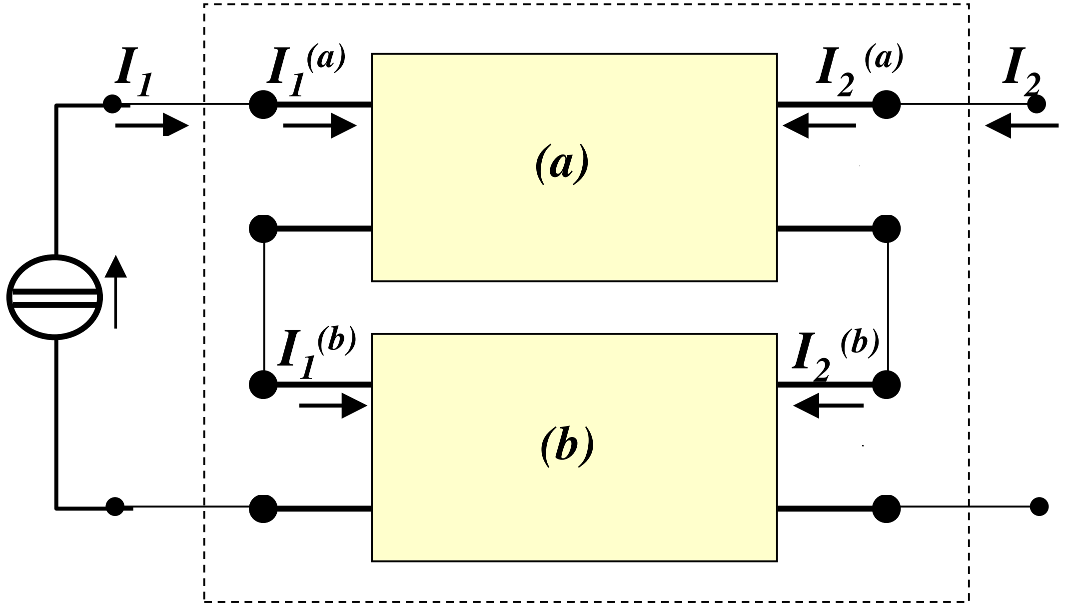
Nella connessione serie serie, la matrice $[Z]$ della rete globale è uguale alla somma delle matrici $[Z^{(a)}]$ e $[Z^{(b)}]$ delle reti iniziali

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Z] = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$$

Connessione serie - serie



Prove di validità

Lasciando aperta la porta 2, si deve avere $I_2 = I_2^{(a)} = I_2^{(b)} = 0$

In particolare, la prova di validità è soddisfatta, se risulta

$$I_2^{(b)} = 0$$

In caso contrario, le reti due porte (a) e (b) non si comportano come tali dopo la connessione

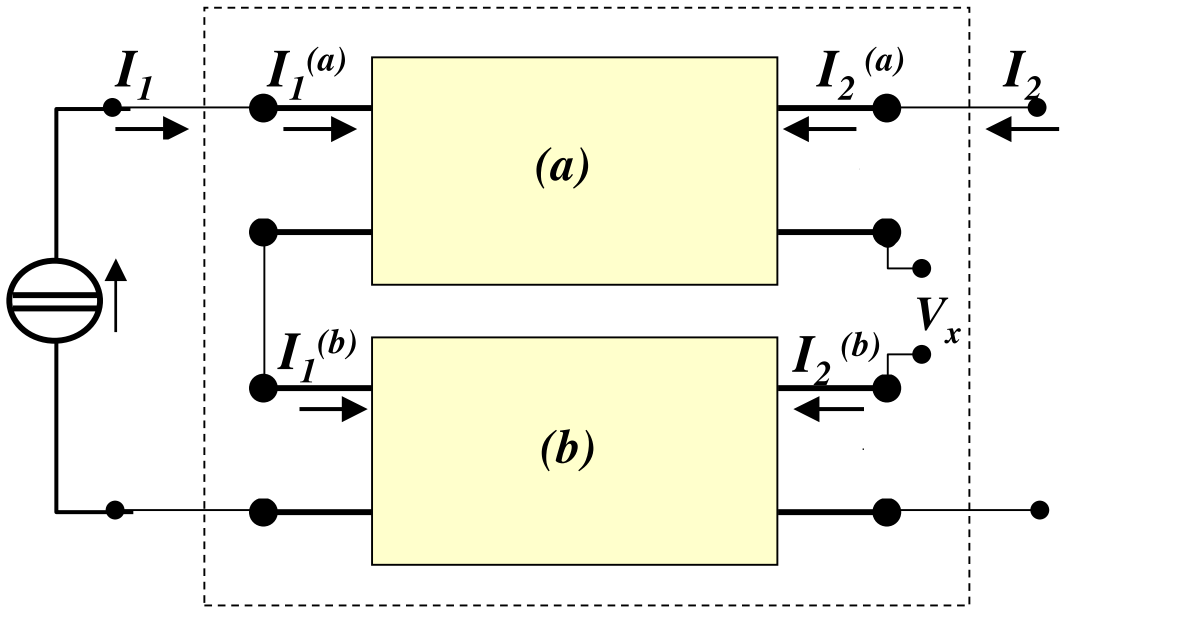
Nella connessione serie serie, la matrice $[Z]$ *della rete globale è uguale alla somma delle matrici* $[Z^{(a)}]$ *e* $[Z^{(b)}]$ *delle reti iniziali*

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Z] = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$$

Connessione serie - serie



Prove di validità

Lasciando aperta la porta 2, si deve avere $I_2 = I_2^{(a)} = I_2^{(b)} = 0$

In alternativa, la prova di validità è soddisfatta, se, interrompendo la connessione serie alla porta due, si ottiene

$$V_x = 0$$

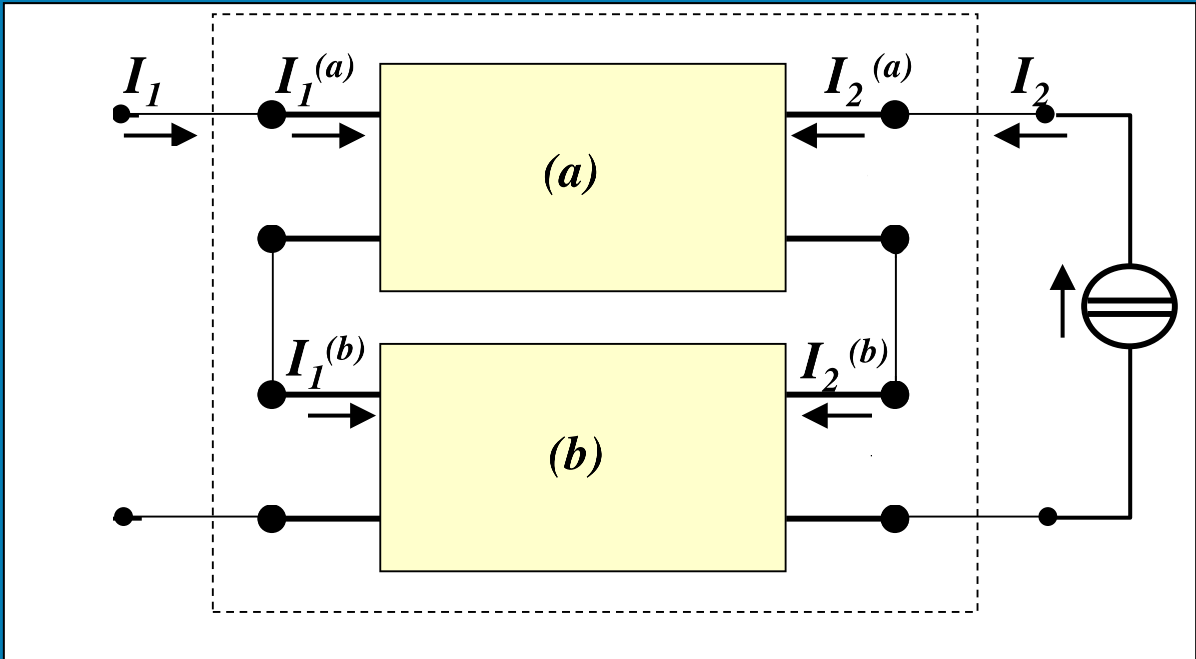
Nella connessione serie serie, la matrice $[Z]$ *della rete globale è uguale alla somma delle matrici* $[Z^{(a)}]$ *e* $[Z^{(b)}]$ *delle reti iniziali*

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Z] = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$$

Connessione serie - serie



Prove di validità

Analogamente, lasciando aperta la porta 1, si deve avere

$$I_1^{(b)} = 0$$

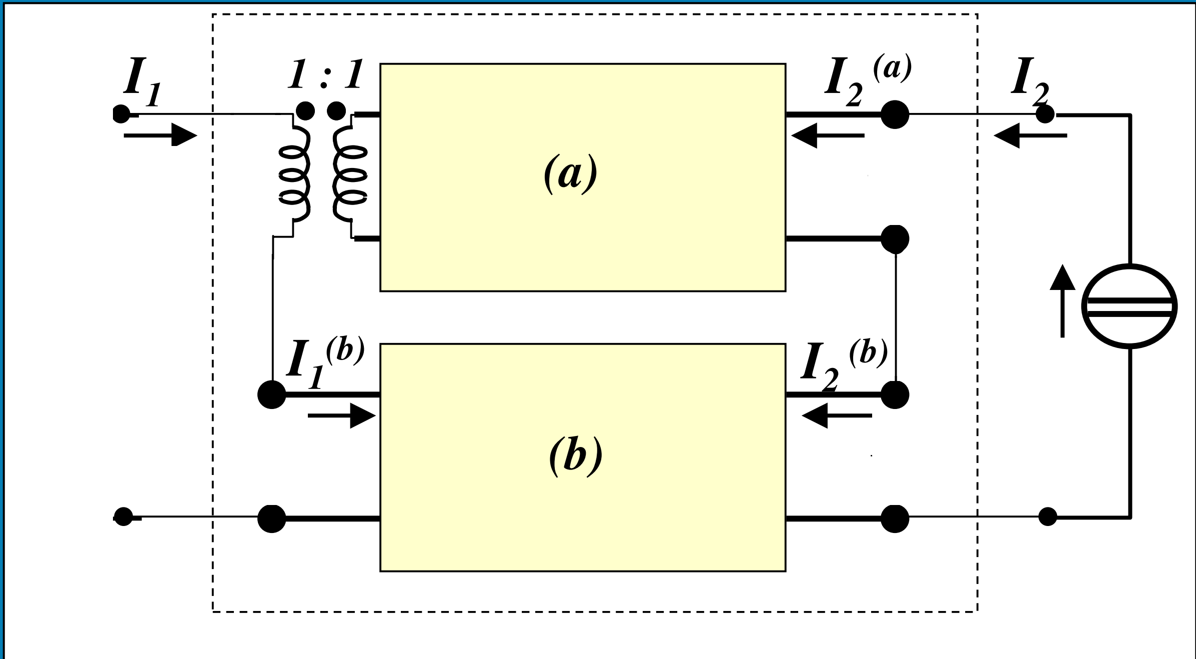
Nella connessione serie serie, la matrice $[Z]$ della rete globale è uguale alla somma delle matrici $[Z^{(a)}]$ e $[Z^{(b)}]$ delle reti iniziali

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Z] = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$$

Connessione serie - serie



Prove di validità

Analogamente, lasciando aperta la porta 1, si deve avere

$$I_1^{(b)} = 0$$

La prova di validità è sempre soddisfatta, se si inserisce un trasformatore ideale di rapporto 1 : 1 in cascata a una delle reti due porte iniziali

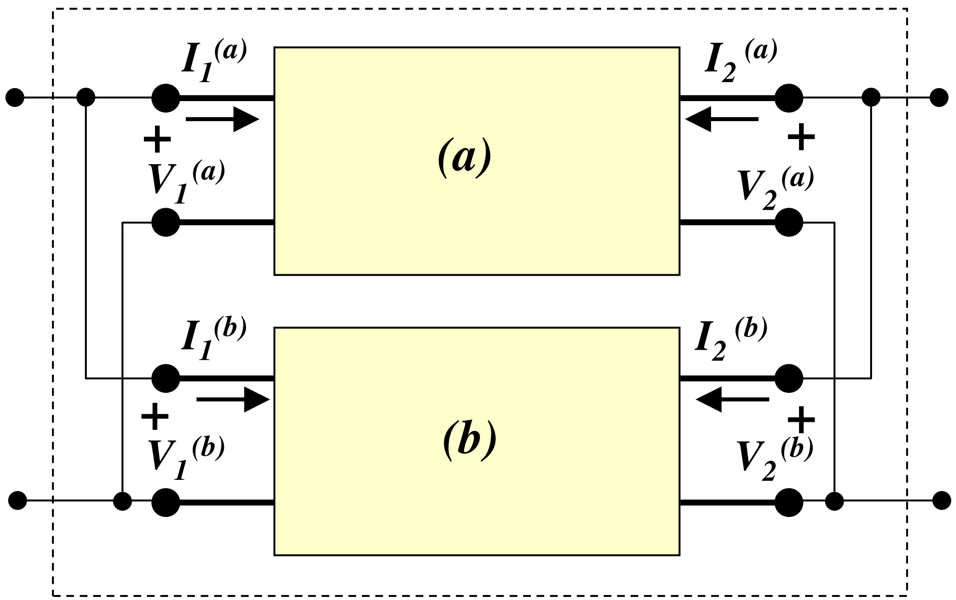
Nella connessione serie serie, la matrice $[Z]$ ***della rete globale è uguale alla somma delle matrici*** $[Z^{(a)}]$ ***e*** $[Z^{(b)}]$ ***delle reti iniziali***

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Z] = [Z^{(a)}] + [Z^{(b)}]$$

Connessione parallelo - parallelo



$$\begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(a)} & y_{12}^{(a)} \\ y_{21}^{(a)} & y_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(b)} & y_{12}^{(b)} \\ y_{21}^{(b)} & y_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

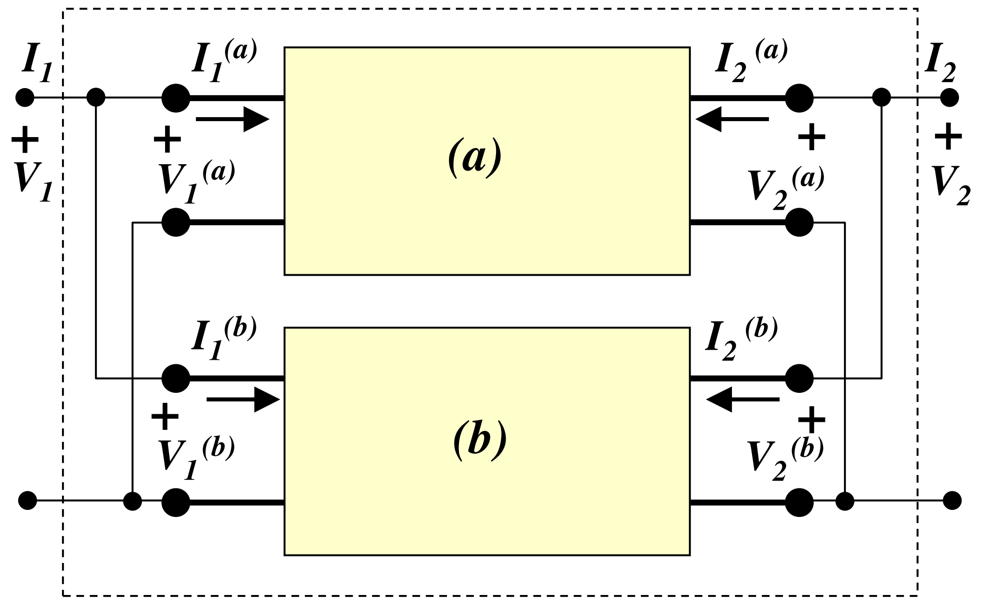
$$\left[I^{(a)}\right] = \left[Y^{(a)}\right]\left[V^{(a)}\right]$$

$$\left[I^{(b)}\right] = \left[Y^{(b)}\right]\left[V^{(b)}\right]$$

Le due reti due porte (a) e (b) possono essere connesse in modo da porre in parallelo le due porte (1) e (2) rispettivamente, ottenendo una connessione detta **parallelo - parallelo**

Si ottiene così una rete due porte globale, che occorre caratterizzare opportunamente

Connessione parallelo - parallelo



$$\begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(a)} & y_{12}^{(a)} \\ y_{21}^{(a)} & y_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(b)} & y_{12}^{(b)} \\ y_{21}^{(b)} & y_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$\left[I^{(a)}\right] = \left[Y^{(a)}\right]\left[V^{(a)}\right]$$

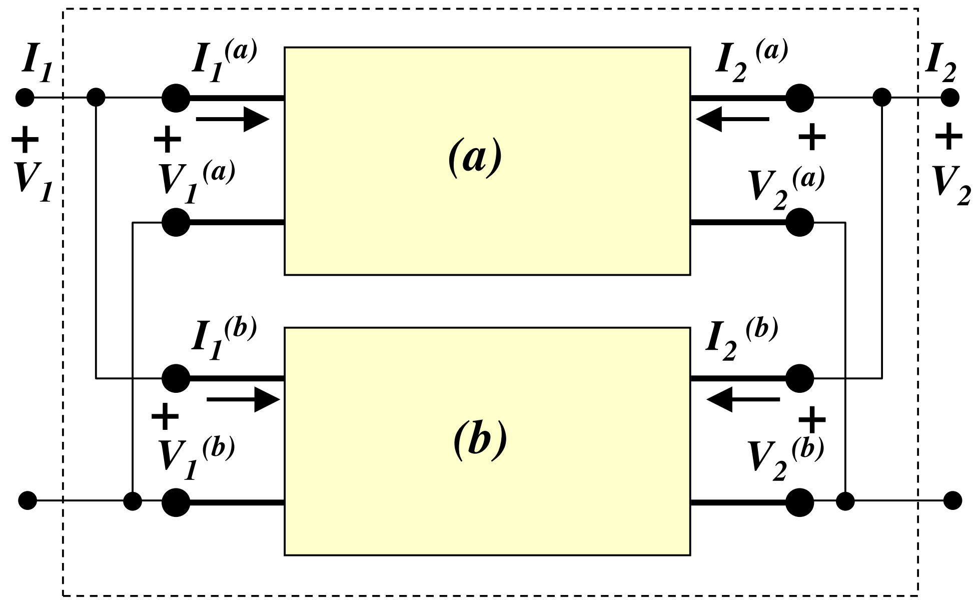
$$\left[I^{(b)}\right] = \left[Y^{(b)}\right]\left[V^{(b)}\right]$$

Dette V_1, I_1, V_2, I_2 le tensioni di porta della rete globale, la connessione parallelo parallelo impone le seguenti relazioni

$$\begin{cases} I_1 = I_1^{(a)} + I_1^{(b)} \\ I_2 = I_2^{(a)} + I_2^{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = V_1^{(a)} = V_1^{(b)} \\ V_2 = V_2^{(a)} = V_2^{(b)} \end{cases}$$

Connessione parallelo - parallelo



$$\begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(a)} & y_{12}^{(a)} \\ y_{21}^{(a)} & y_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(b)} & y_{12}^{(b)} \\ y_{21}^{(b)} & y_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$\left[I^{(a)}\right] = \left[Y^{(a)}\right]\left[V^{(a)}\right]$$

$$\left[I^{(b)}\right] = \left[Y^{(b)}\right]\left[V^{(b)}\right]$$

$$[I] = \left[I^{(a)}\right] + \left[I^{(b)}\right] = \left[Y^{(a)}\right]\left[V^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]\left[V^{(b)}\right] =$$

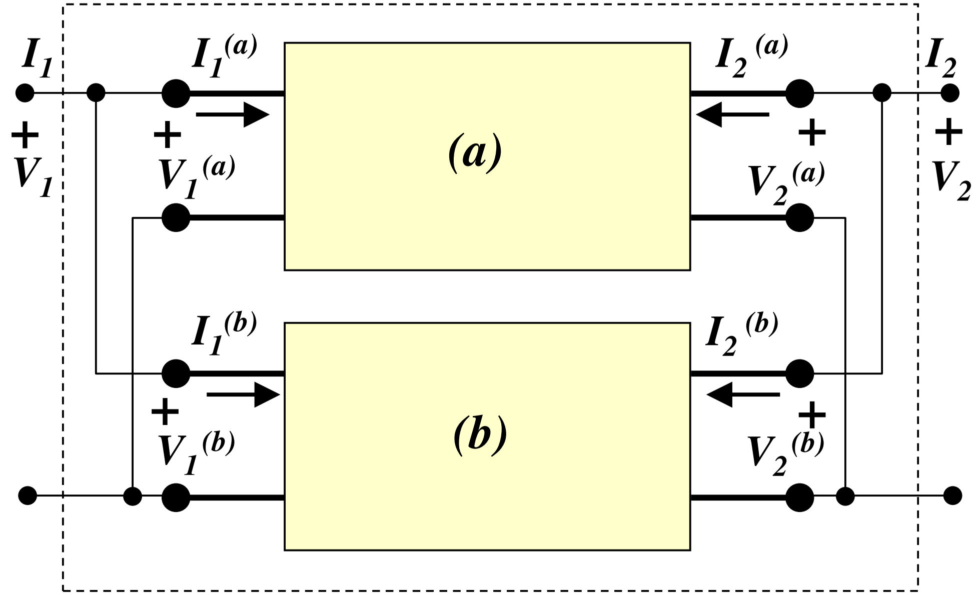
$$= \left[Y^{(a)}\right][V] + \left[Y^{(b)}\right][V] = \left\{\left[Y^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]\right\}[V] = [Y]\,[V]$$

$$[V] = \left[V^{(a)}\right] = \left[V^{(b)}\right]$$

Pertanto si ha

$$[Y] = \left[Y^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]$$

Connessione parallelo - parallelo



$$\begin{bmatrix} I_1^{(a)} \\ I_2^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(a)} & y_{12}^{(a)} \\ y_{21}^{(a)} & y_{22}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ V_2^{(a)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{(b)} \\ I_2^{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^{(b)} & y_{12}^{(b)} \\ y_{21}^{(b)} & y_{22}^{(b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ V_2^{(b)} \end{bmatrix}$$

Notazioni matriciali

$$\left[I^{(a)}\right] = \left[Y^{(a)}\right]\left[V^{(a)}\right]$$

$$\left[I^{(b)}\right] = \left[Y^{(b)}\right]\left[V^{(b)}\right]$$

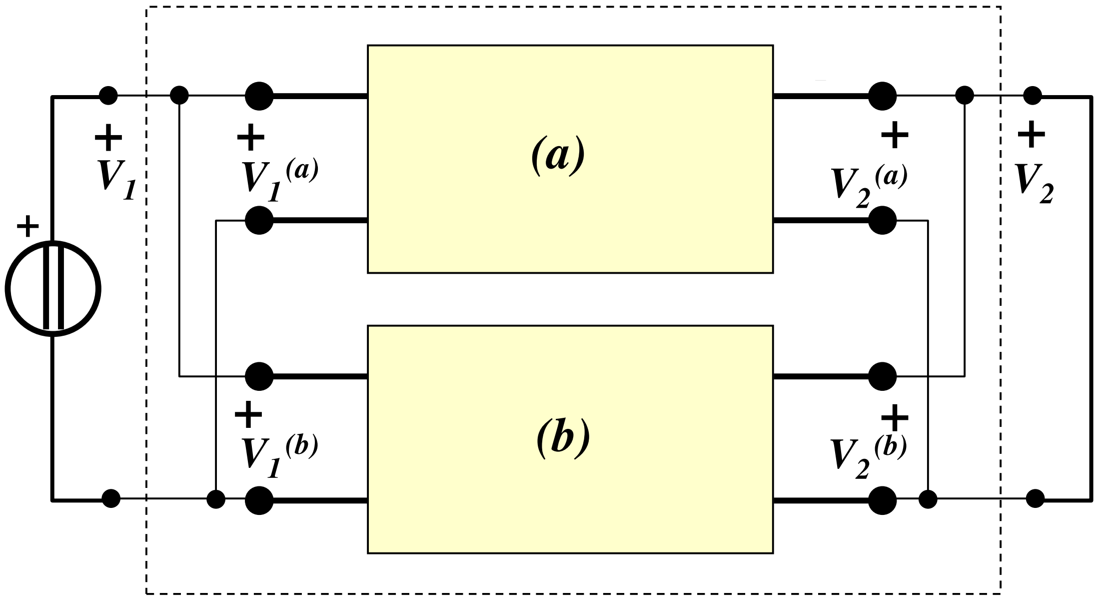
Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[\,Y\,]$ della rete globale è pari alla somma delle matrici $[\,Y^{(a)}\,]$ e $[\,Y^{(b)}\,]$ delle reti iniziali

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$\left[Y\right] = \left[Y^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]$$

Connessione parallelo - parallelo



Prove di validità

Se la porta 2 è in corto circuito, si ha $V_2 = V_2^{(a)} = V_2^{(b)} = 0$

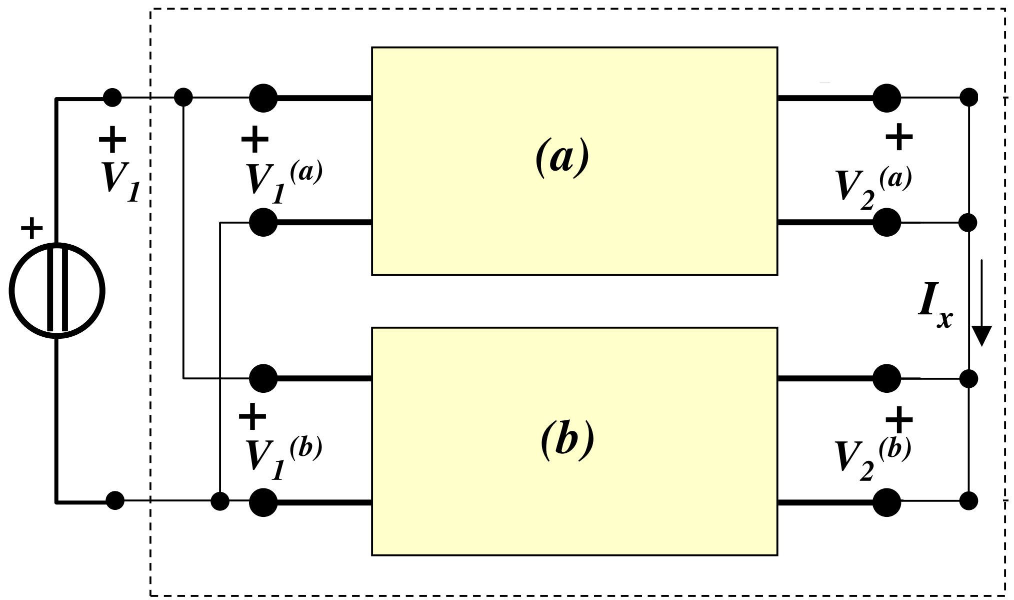
Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[\,Y\,]$ *della rete globale è pari alla somma delle matrici* $[\,Y^{(a)}\,]$ *e* $[\,Y^{(b)}\,]$ *delle reti iniziali*

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$\left[Y\right] = \left[Y^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]$$

Connessione parallelo - parallelo



Prove di validità

Se la porta 2 è in corto circuito, si ha $V_2 = V_2^{(a)} = V_2^{(b)} = 0$

La chiusura alla porta 2 può essere modificata nel modo indicato.

La prova di validità è soddisfatta, se risulta $I_x = 0$

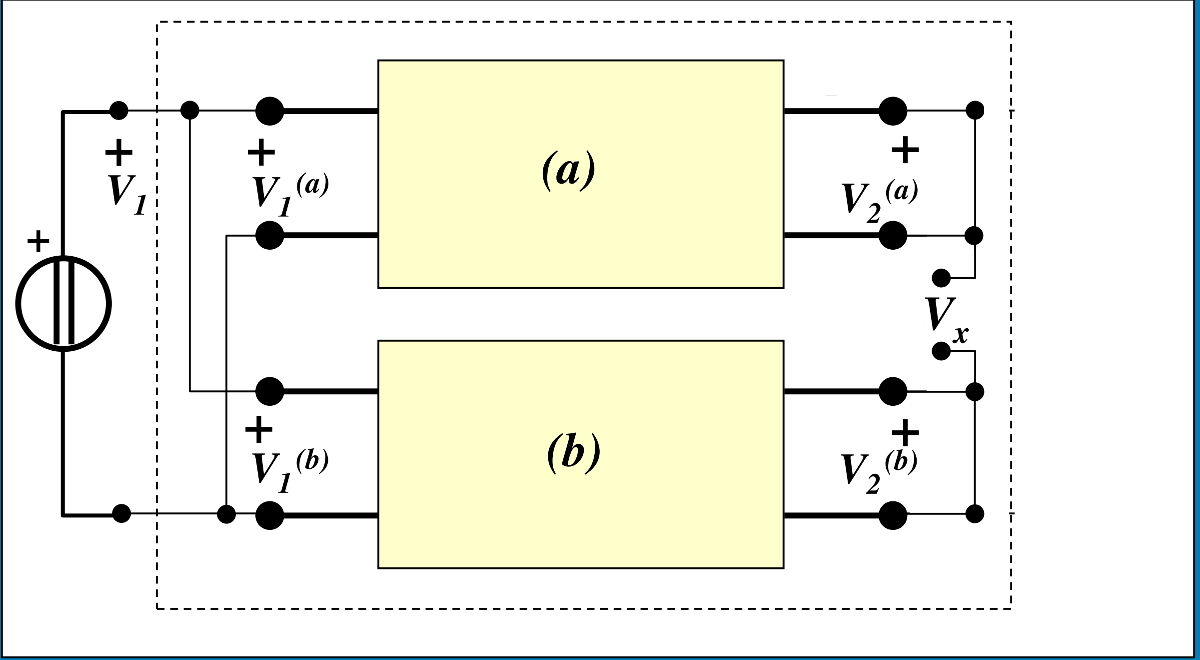
Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[Y]$ ***della rete globale è pari alla somma delle matrici*** $[Y^{(a)}]$ ***e*** $[Y^{(b)}]$ ***delle reti iniziali***

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Y] = [Y^{(a)}] + [Y^{(b)}]$$

Connessione parallelo - parallelo



Prove di validità

Se la porta 2 è in corto circuito, si ha $V_2 = V_2^{(a)} = V_2^{(b)} = 0$

In alternativa, la prova di validità è soddisfatta, se, interrompendo la connessione indicata, si ottiene

$$V_x = 0$$

Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[\,Y\,]$ ***della rete globale è pari alla somma delle matrici*** $[\,Y^{(a)}\,]$ ***e*** $[\,Y^{(b)}\,]$ ***delle reti iniziali***

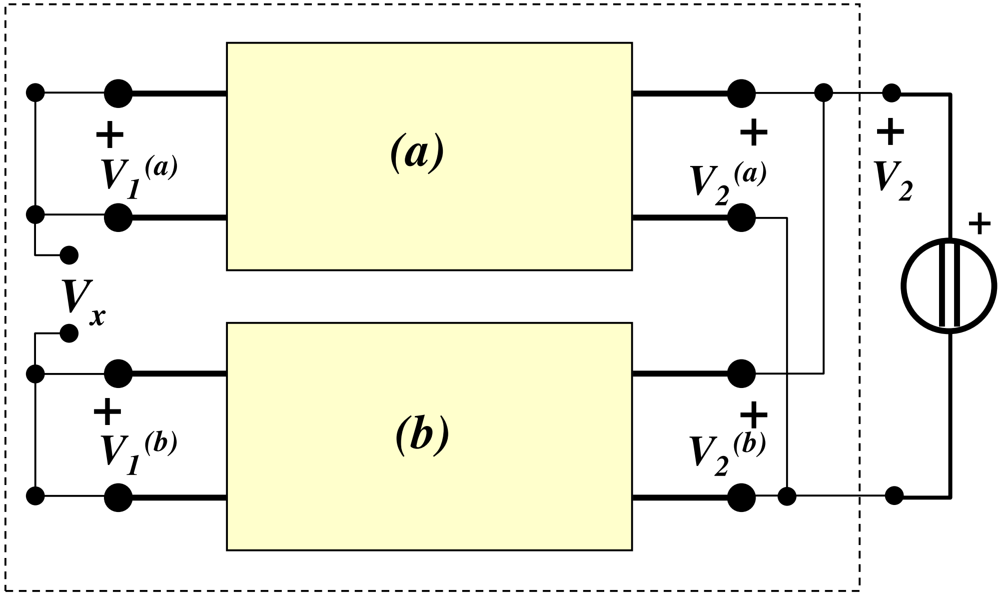
Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$\left[Y\right] = \left[Y^{(a)}\right] + \left[Y^{(b)}\right]$$

Tor Vergata

Connessione parallelo - parallelo



Prove di validità

Analogamente, ponendo in corto circuito la porta 1, si deve avere

$$V_x = 0$$

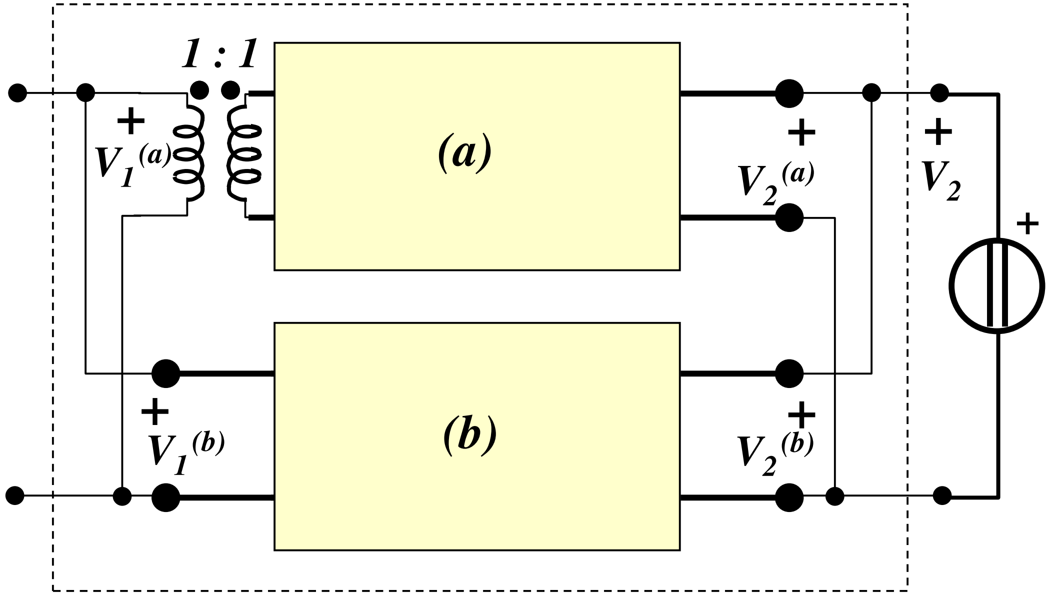
Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[Y]$ della rete globale è pari alla somma delle matrici $[Y^{(a)}]$ e $[Y^{(b)}]$ delle reti iniziali

Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Y] = [Y^{(a)}] + [Y^{(b)}]$$

Connessione parallelo - parallelo



Prove di validità

Analogamente, ponendo in corto circuito la porta 1, si deve avere

$$V_x = 0$$

La prova di validità è sempre soddisfatta, se si inserisce un trasformatore ideale di rapporto 1 : 1 in cascata a una delle reti due porte iniziali

Nella connessione parallelo parallelo, la matrice $[Y]$ della rete globale è pari alla somma delle matrici $[Y^{(a)}]$ e $[Y^{(b)}]$ delle reti iniziali

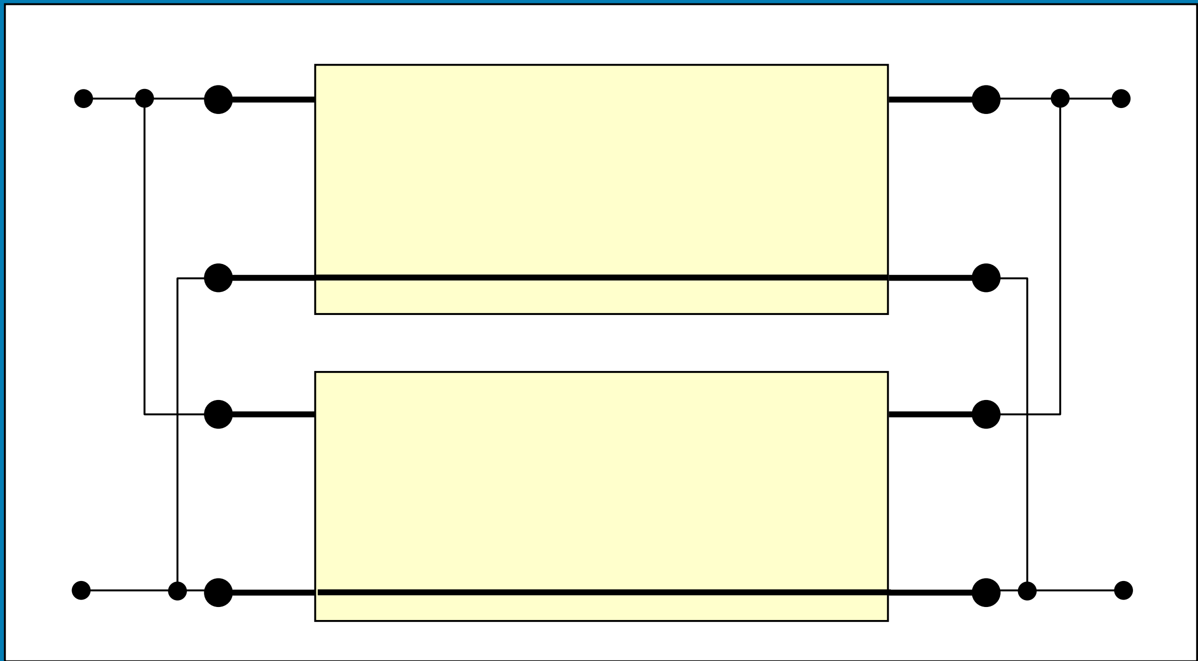
Relazione valida se sono soddisfatte le prove di validità

Pertanto si ha

$$[Y] = [Y^{(a)}] + [Y^{(b)}]$$

Tor Vergata

Esempi

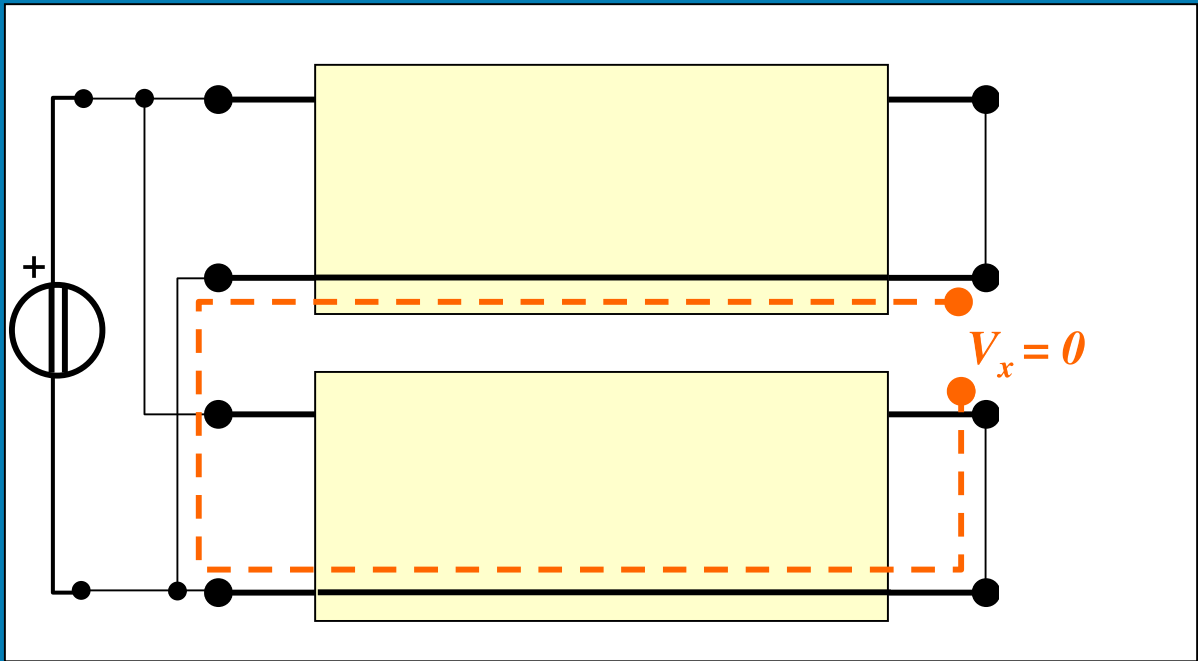


Una rete due porte si dice ***sbilanciata*** ***se è presente una connessione diretta fra i morsetti bassi delle porte***

Tale rete è detta anche rete a tre terminali

La connessione parallelo parallelo di due reti a tre terminali soddisfa sempre le condizioni di validità

Esempi

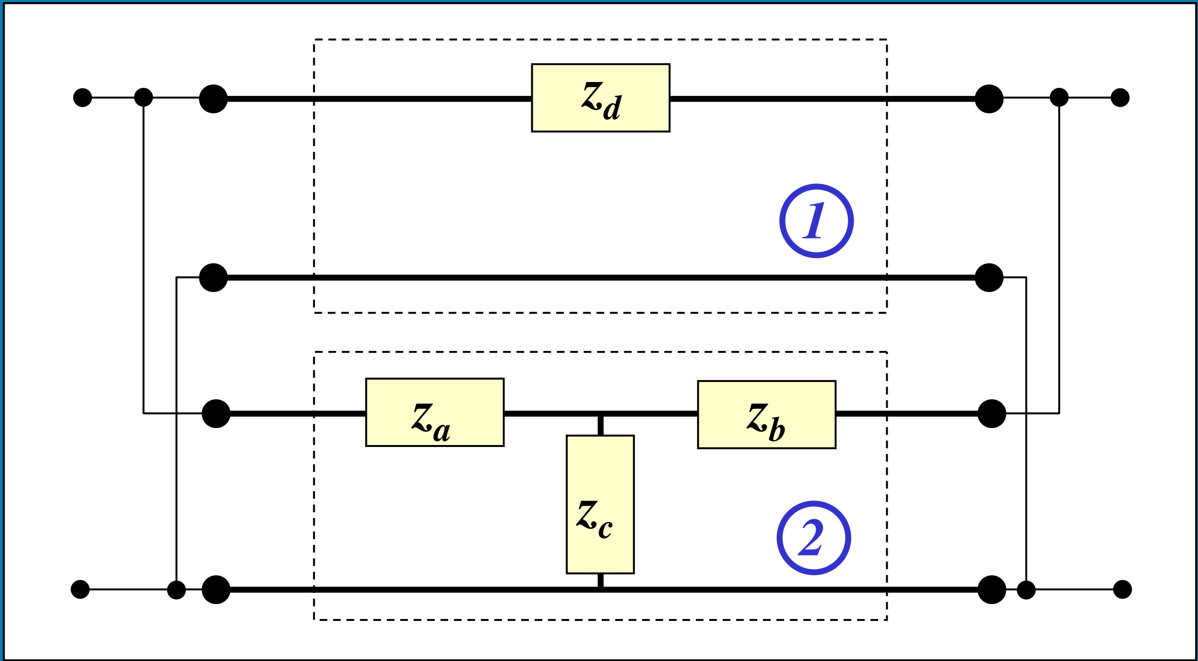


Una rete due porte si dice sbilanciata se è presente una connessione diretta fra i morsetti bassi delle porte

Tale rete è detta anche rete a tre terminali

La connessione parallelo parallelo di due reti a tre terminali soddisfa sempre le condizioni di validità

Esempi



Rete a " T derivato "

Connessione parallelo parallelo

$$y_d = 1 / z_d$$

$$[Y_1] = \begin{bmatrix} y_d & -y_d \\ -y_d & y_d \end{bmatrix}$$

$$[Z_2] = \begin{bmatrix} z_a + z_c & z_c \\ z_c & z_b + z_c \end{bmatrix}$$

$$\Delta [Z_2] = z_a z_b + z_b z_c + z_c z_a$$

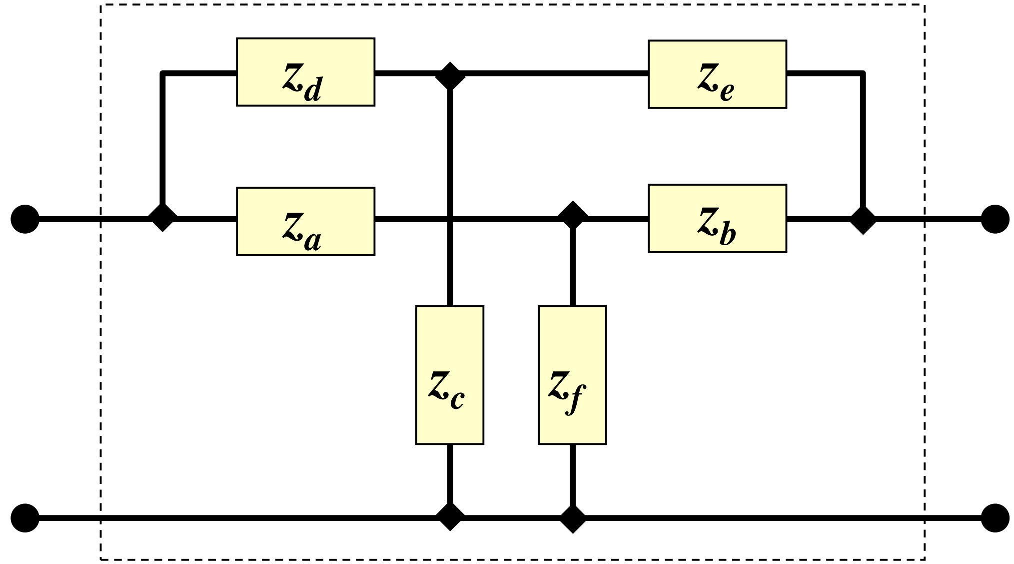
$$[Y_2] = [Z_2]^{-1} = \frac{1}{\Delta [Z_2]} \begin{bmatrix} z_b + z_c & -z_c \\ -z_c & z_a + z_c \end{bmatrix}$$

Rete totale

$$[Y_T] = [Y_1] + [Y_2]$$

Tor Vergata

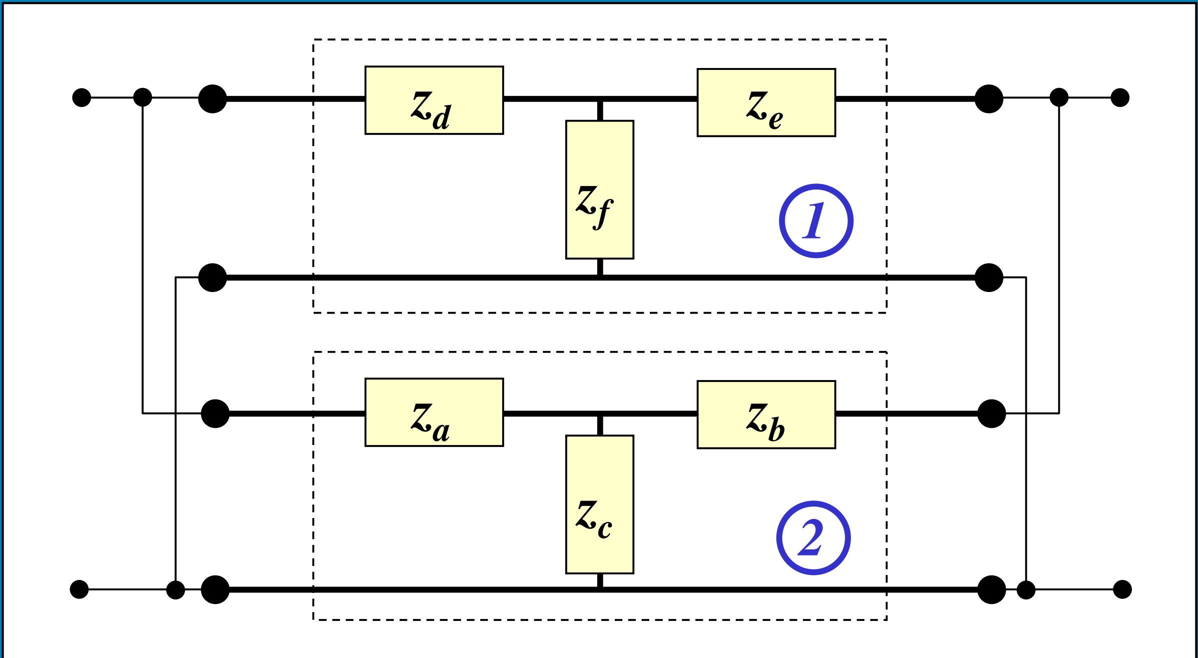
Esempi



Rete a " doppio T "

Connessione parallelo parallelo

Esempi



Rete a "doppio T"

Connessione parallelo parallelo

$$[\mathbf{Z}_1] = \begin{bmatrix} z_d + z_f & z_f \\ z_f & z_e + z_f \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Z}_2] = \begin{bmatrix} z_a + z_c & z_c \\ z_c & z_b + z_c \end{bmatrix}$$

$$\Delta[Z_1] = z_d z_e + z_e z_f + z_f z_d$$

$$\Delta[Z_2] = z_a z_b + z_b z_c + z_c z_a$$

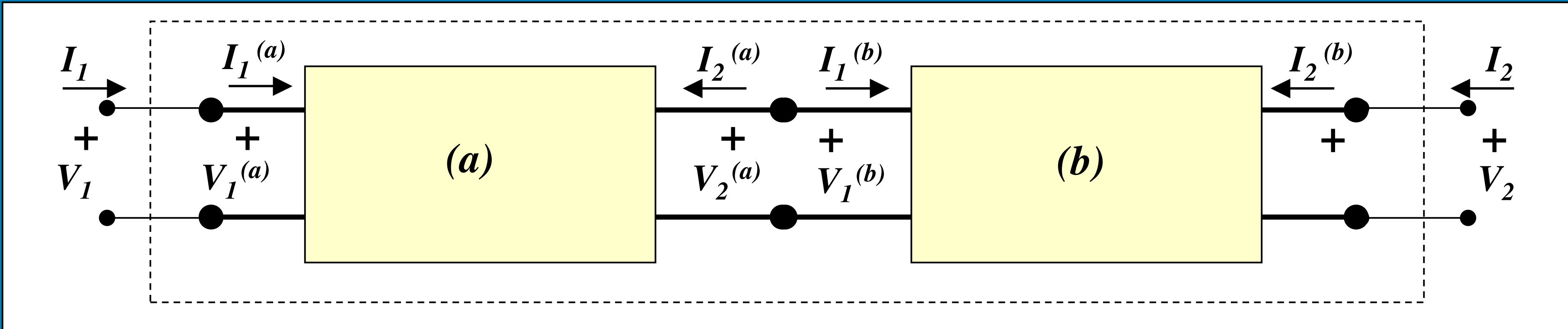
Rete totale

$$[\mathbf{Y}_T] = [\mathbf{Y}_1] + [\mathbf{Y}_2]$$

$$[\mathbf{Y}_1] = [\mathbf{Z}_1]^{-1} = \frac{1}{\Delta[Z_1]} \begin{bmatrix} z_e + z_f & -z_f \\ -z_f & z_d + z_f \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Y}_2] = [\mathbf{Z}_2]^{-1} = \frac{1}{\Delta[Z_2]} \begin{bmatrix} z_b + z_c & -z_c \\ -z_c & z_a + z_c \end{bmatrix}$$

Connessione in cascata



Dette V_1, I_1, V_2, I_2 le tensioni di porta della rete globale, si ha

$$\begin{cases} V_1 = V_1^{(a)}\,;\ V_2 = V_2^{(b)} \\ I_1 = I_1^{(a)}\,;\ I_2 = I_2^{(b)} \end{cases}$$

Dalla connessione si ha

$$\begin{cases} V_2^{(a)} = V_1^{(b)} \\ -I_2^{(a)} = I_1^{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{(a)} \\ I_1^{(a)} \end{bmatrix} = \left[\, T^{(a)} \,\right] \begin{bmatrix} V_2^{(a)} \\ -I_2^{(a)} \end{bmatrix} = \left[\, T^{(a)} \,\right] \begin{bmatrix} V_1^{(b)} \\ I_1^{(b)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\, T^{(a)} \,\right]\left[\, T^{(b)} \,\right] \begin{bmatrix} V_2^{(b)} \\ -I_2^{(b)} \end{bmatrix} = \left[\, T \,\right] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Nella connessione in cascata, la matrice $[\,T\,]$ della rete globale è pari al prodotto delle matrici $[\,T^{(a)}\,]$ e $[\,T^{(b)}\,]$ delle reti iniziali